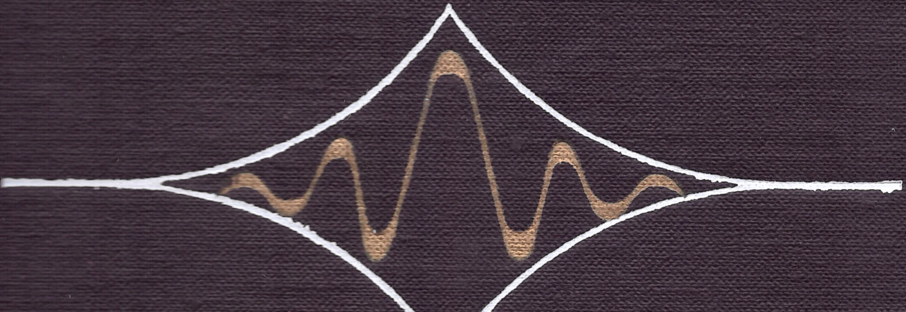
621.39
К50

Д. Д. КЛОВСКИЙ
В. А. ШИЛКИН

ТЕОРИЯ ПЕРЕДАЧИ СИГНАЛОВ В ЗАДАЧАХ



ТЕОРИЯ ПЕРЕДАЧИ СИГНАЛОВ В ЗАДАЧАХ

621.39
К50

Д. Д. КЛОВСКИЙ
В. А. ШИЛКИН

ТЕОРИЯ ПЕРЕДАЧИ СИГНАЛОВ В ЗАДАЧАХ

ДОПУЩЕНО МИНИСТЕРСТВОМ ВЫСШЕГО
И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР
В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВУЗОВ,
ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО СПЕЦИАЛЬНОСТЯМ
«АВТОМАТИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОСВЯЗЬ»,
«РАДИОСВЯЗЬ И РАДИОВЕЩАНИЕ»
И «МНОГОКАНАЛЬНАЯ ЭЛЕКТРОСВЯЗЬ»

071008

621.391

2013

ПЕРЕВІРЕНО

МОСКВА «СВЯЗЬ» 1978

[illegible] бібліотека
[illegible]
[illegible] завод

32.88
К50
УДК 621.391(075.8)

Кловский Д. Д., Шилкин В. А.

К50 Теория передачи сигналов в задачах: Учеб. пособие для вузов.— М.: Связь, 1978.— 252 с. ил.
В пер.: 1 р.

Книга представляет собой руководство к расчету систем передачи информации по каналам электрической связи. До формулировки задач отдельных разделов, затрагивающих разностороннюю проблематику, связанную с вероятностным расчетом различных звеньев систем связи, даются краткие теоретические сведения в виде рассчетной процедуры.

Книга предназначена студентам институтов связи и родственных специальностей, а также может быть использована широким кругом инженерно-технических работников, которые начинают осваивать методы и приемы статистического анализа и синтеза систем передачи информации.

$$К\ \frac{30401-095}{045(01)-78}\ 6-78$$

ББК32.88
6Ф2

РЕЦЕНЗЕНТЫ:
Н. Т. ПЕТРОВИЧ, А. Г. ЗЮКО

ИБ № 513

Даниил Давыдович Кловский,
Владимир Афанасьевич Шилкин

ТЕОРИЯ ПЕРЕДАЧИ СИГНАЛОВ В ЗАДАЧАХ

Редактор *В. А. Лазарева*
Художник *В. Н. Журавский*
Технический редактор *Г. И. Колосова*
Корректор *Л. Н. Лещева*

Сдано в набор 16/XI 1977 г. Подп. в печ. 7/III 1978 г.
Т-01265 Формат 84×108/32 Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная.
Печать высокая 18,48 усл.-печ. л. 19,24 уч.-изд. л. Тираж 18 000 экз.
Изд. № 17165 Зак. № 299 Цена 1 руб.
Издательство «Связь». Москва 101000, Чистопрудный бульвар, д. 2

Типография издательства «Связь» Госкомиздата СССР
Москва 101000, ул. Кирова, д. 40

© Издательство «Связь», 1978 г.

Предисловие

Книга представляет собой учебное пособие по курсу «Теория передачи сигналов» и предназначена в первую очередь студентам институтов связи специальностей 0702, 0703, 0708.

Она опирается и методически увязана с курсом теории передачи сигналов, читаемым в институтах связи [10, 12, 18]. Вместе с тем авторы адресуют свою книгу и широкому кругу читателей, которые начинают осваивать методы статистического анализа и синтеза систем передачи сообщений (дискретных и непрерывных) по каналам электрической связи.

Авторы отдают себе отчет в том, что многие из задач, связанных с вероятностным расчетом отдельных звеньев систем передачи информации и возникающих перед современными инженерами, занимающимися разработкой и эксплуатацией систем связи, требуют знаний, выходящих за пределы курса ТПС. В этом случае следует обратиться к специальной литературе. Однако для успешной работы с такой литературой требуется в достаточной мере овладеть основными идеями и методами расчета, разработанными в статистической теории связи. Именно с этой точки зрения книга может оказаться полезной широкому кругу читателей, занимающихся разработкой и эксплуатацией систем передачи информации.

Предлагаемая вниманию читателей книга близка по своей направленности вышедшей ранее книге В. Т. Горяинова, А. Т. Журавлева, В. И. Тихонова «Примеры и задачи по статистической радиотехнике» [5] (М., «Советское радио», 1970).

Однако, в отличие от этой книги предлагаемая вниманию читателей книга содержит задачи, в большей степени увязанные с инженерной практикой, и предполагает предварительную подготовку читателя лишь в пределах курса ТПС, изучаемого в институтах связи. Кроме того, книга содержит ряд новых разделов, представляющих безусловный интерес для современного инженера связи, которые не вошли в названную книгу:

1) расчет устройств кодирования и декодирования сообщений и оценка их эффективности;

2) расчет помехоустойчивости систем передачи аналоговой информации, в том числе при передаче дискретными методами;

3) анализ сравнительной эффективности многоканальных систем связи;

4) расчет различных характеристик систем передачи информации (физический объем сигнала и канала, надежность связи, выигрыш и обобщенный выигрыш перехода от одной системы к другой и т. д.).

При подготовке книги к изданию авторы сочли возможным исключить традиционные задачи по расчету вероятностных характеристик случайных процессов, поскольку подобные задачи в достаточно большом количестве содержатся в книгах [5, 8, 15].

Улучшению содержания книги в значительной степени способствовали замечания ее рецензентов профессора д-ра техн. наук. А. Г. Зюко и профессора д-ра техн. наук Н. Т. Петровича, которым авторы выражают глубокую признательность.

Авторы благодарят также доцента Б. И. Николаева за помощь в подборе и решении некоторых задач § 5.5 и гл. 8.

Замечания и пожелания читателей будут встречены авторами с благодарностью и вниманием.

Замечания следует направлять по адресу: 101000, Москва, Чистопрудный бульвар, 2, издательство «Связь».

Авторы

Список основных обозначений

A — ансамбль переданных сообщений

A' — ансамбль принятых сообщений

a — реализация переданного сообщения

a' — реализация принятого сообщения

$B(t)$ — случайный переданный модулирующий сигнал

$B'(t)$ — случайный принятый модулирующий сигнал

$b(t)$ — реализация переданного модулирующего сигнала

$b'(t)$ — реализация принятого модулирующего сигнала

b_i — элемент переданной кодовой комбинации

b'_i — элемент принятой кодовой комбинации

$\vec{b}$ — переданная кодовая комбинация

$\vec{b}'$ — принятая кодовая комбинация

$B_x(t_1, t_2)$ — корреляционная функция случайного процесса $X(t)$

$B_x(\tau)$ — корреляционная функция стационарного случайного процесса

$\overset{*}{B}_x(\tau)$ — усредненная корреляционная функция нестационарного случайного процесса

C — пропускная способность канала связи

$\vec{c}(\vec{b}')$ — синдром принятой кодовой комбинации

d — кодовое расстояние по Хеммингу

E — энергия элемента сигнала на передаче

E' — энергия элемента сигнала на приеме

$F_{\text{к}}$ — полоса частот канального сигнала

$F_{\text{с}}$ — полоса частот модулирующего сигнала (сообщения)

$F_{\text{э}}$ — ширина полосы энергетического спектра

$G(f)$ — энергетический спектр (спектральная плотность мощности) случайного процесса

$\overset{*}{G}(f)$ — усредненный энергетический спектр нестационарного случайного процесса

$G_0(f)$ — энергетический спектр случайного процесса на положительных частотах

$G_{\text{ш}}$ — энергетический спектр белого шума на положительных частотах

$G(t, \tau)$ — импульсная переходная характеристика линейного канала со случайно меняющимися параметрами

$g(t, \tau)$ — импульсная переходная характеристика линейного канала с переменными (регулярными) параметрами

g — выигрыш системы (модема) по отношению *сигнал/шум*

g' — обобщенный выигрыш системы (модема)
$H(A)$ — энтропия источника дискретных сообщений
$H'(A)$ — производительность источника дискретных сообщений
$H_\varepsilon(A)$ — эпсилон-энтропия источника непрерывных сообщений
$H'_\varepsilon(A)$ — эпсилон-производительность источника непрерывных сообщений
$h(A)$ — дифференциальная энтропия непрерывного сообщения
$h^2=\dfrac{P_с}{P_ш}$ — отношение средних мощностей сигнала и шума (отношение *сигнал/шум*)
$h^2{}_0=\dfrac{P_с}{G_ш \dfrac{1}{T}}$ — отношение *сигнал/шум* в полосе $1/T$
$h^2{}_э=\dfrac{1}{\beta}$ — эквивалентное отношение *сигнал/шум*, равное обратной величине коэффициента использования мощности сигнала β (по Зюко)
$I(a_i)$ — количество информации в элементе сообщения
$I(A, A')$ — среднее количество переданной информации на один символ
$I'(A, A')$ — среднее количество информации, переданной в единицу времени на один символ (скорость передачи информации)
$\mathbf{K}(f, t), \mathbf{k}(f, t)$ — комплексная передаточная функция линейного канала со случайными и регулярными параметрами соответственно
$K(f, t), k(f, t)$ — модуль комплексной передаточной функции линейного канала со случайными и регулярными параметрами соответственно
K — объем первичного алфавита сообщений
$K_с$ — коэффициент эффективности системы связи (коэффициент использования пропускной способности канала)
m — основание кода (объем вторичного алфавита)
$m_x(t)$ — математическое ожидание случайного процесса
n — число разрядов в кодовой комбинации
$P(\cdot)$ — вероятность события, указанного в скобках
$p_к$ — вероятность ошибочного декодирования кодовой комбинации
$p_{ош}$ — вероятность ошибочного приема элементарного символа
$p_э$ — эквивалентная вероятность ошибочного приема элементарного символа
$P_с$, $P_ш$ — средняя мощность сигнала и шума
q — кратность ошибки в кодовой комбинации
$R_x(t_1, t_2)$ — коэффициент корреляции случайного процесса
$R_x(\tau)$ — коэффициент корреляции стационарного случайного процесса
$s(t)$ — реализация канального сигнала
$s'(t)$ — принятая реализация канального сигнала

$\mathbf{S}(f)$ — комплексная спектральная плотность детерминированного сигнала по Фурье
$\mathbf{S}(-f)$ — комплексно-сопряженная спектральная плотность по Фурье
$S(f)$ — модуль комплексной спектральной плотности по Фурье
$U(t)$ — случайный процесс, описывающий аддитивный шум в канале
$v_{\text{и}}=1/T$ — скорость создания символов сообщения источником
$w_{\text{п}}(x)$ — n-мерная плотность вероятности случайного процесса
$X(t)$, $Y(t)$ — случайные процессы
$x(t)$, $y(t)$ — реализации случайных процессов

$\mathring{X}(t)$ — центрированное значение случайного процесса
$z(t)$ — реализация смеси сигнала и шума в месте приема
$\hat{z}(t)$ — сигнал, сопряженный с сигналом $z(t)$
$\alpha_{i/j}$ — выигрыш по вероятности ошибки (достоверности) перехода от i-й системы к j-й
γ — модуль коэффициента передачи канала
Δ — шаг квантования
E — случайная ошибка при приеме непрерывного сообщения
ε — реализация ошибки при приеме непрерывного сообщения
ν — удельная скорость передачи информации (на 1 Гц полосы)
Π^2 — пикфактор сигнала по мощности
$\sigma^2{}_x$ — дисперсия случайного процесса
$\eta_{Pi/j}$ — энергетический выигрыш перехода от i-й системы к j-й
$\eta_{\nu i/j}$ — выигрыш по удельной скорости передачи информации перехода от i-й системы к j-й
$\eta_{Fi/j}$ — выигрыш по полосе частот перехода от i-й системы к j-й
$\eta_{i/j}=\eta_{Pi/j}+\eta_{Fi/j}$ — обобщенный выигрыш перехода от i-й системы к j-й
$\rho_{\text{и}}$ — избыточность источника сообщений
$\rho_{\text{к}}$ — избыточность кода
$\tau_{\text{к}}$ — интервал корреляции случайного процесса
$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ — функция Крампа
$\overline{\qquad\qquad}$ знак усреднения по ансамблю
$\widetilde{\qquad\qquad}$ знак усреднения по времени

Глава 1

СПЕКТРАЛЬНОЕ И ВРЕМЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ И ПОМЕХ

1.1. Спектральные характеристики случайных процессов

В качестве спектральной характеристики случайных процессов используется функция $G(f)$, которая называется энергетическим спектром или спектральной плотностью мощности.

Энергетический спектр $G(f)$ и корреляционная функция $B(\tau)$ стационарного случайного процесса связаны друг с другом парой преобразований Фурье:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\, \mathrm{e}^{-i\omega\tau}\, d\tau = 2\int_{0}^{\infty} B(\tau) \cos\omega\tau\, d\tau; \tag{1.1}$$

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\, \mathrm{e}^{i\omega\tau}\, df = 2\int_{0}^{\infty} G(f) \cos\omega\tau\, df. \tag{1.2}$$

Корреляционную функцию случайного процесса $X(t)$, характеризующую статистическую связь между его сечениями в моменты времени t и $t+\tau$, определяют так:

$$B_{\overset{\circ}{x}}(t,\ t+\tau) = \overline{[X(t) - \overline{X(t)}]\,[X(t+\tau) - \overline{X(t+\tau)}]} \tag{1.3}$$

или же

$$B_x(t,\ t+\tau) = \overline{X(t)\, X(t+\tau)}. \tag{1.4}$$

Аналогично определяют взаимокорреляционную функцию случайных процессов.

Корреляционная функция стационарных случайных процессов[1] зависит только от сдвига между сечениями τ.

Для нестационарных случайных процессов используется понятие усредненного энергетического спектра $\overset{*}{G}(f)$, связанного с усредненной корреляционной функций $\overset{*}{B}(\tau) = \widetilde{B(t,\ t+\tau)}$ соотношениями (1.1), (1.2).

Энергетический спектр $G(f)$ определен как для положительных, так и для отрицательных частот и является четной функцией частоты. Для спектральной плотности реального процесса, определенного только на положительных частотах, справедливо соотношение

---

[1] Для эргодических случайных процессов корреляционные функции $B_{\overset{\circ}{x}}(\tau)$, $B_x(\tau)$ могут быть найдены путем усреднения во времени одной реализации. Аналогично могут быть введены понятия корреляционной и взаимокорреляционной функций для детерминированных процессов.

$$G_0(f) = 2G(f). \tag{1.5}$$

Для сравнения ширины спектра различных случайных процессов занимаемую ими полосу частот определяют по критерию эквивалентного прямоугольника

$$F_э = \frac{1}{G_{0макс}} \int\limits_0^\infty G_0(f)\, df = \frac{B(0)}{G_{0макс}}. \tag{1.6}$$

Здесь $G_{0\,макс}$ — наибольшее значение спектральной плотности мощности случайного процесса в полосе частот.

По методу эквивалентного прямоугольника определяют время (интервал) корреляции случайного процесса

$$\tau_к = \frac{1}{B(0)} \int\limits_0^\infty |B(\tau)|\, d\tau = \int\limits_0^\infty |R(\tau)|\, d\tau. \tag{1.7}$$

Здесь $R(\tau) = \dfrac{1}{B(0)} B(\tau)$ — коэффициент корреляции.

Произведение времени корреляции $\tau_к$ и ширины энергетического спектра $F_э$ случайного процесса удовлетворяет соотношению

$$F_э \tau_к \approx 1. \tag{1.8}$$

Перейдем к определению спектральных характеристик модулированных колебаний, полагая, что несущее колебание является гармоническим.

Различают следующие виды модуляции гармонического несущего колебания.

1. Амплитудная модуляция (АМ)

$$s_{АМ}(t) = U_m \left[1 + \frac{k_{АМ}}{U_m} \overset{\circ}{X}(t)\right] \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{1.9}$$

где $\overset{\circ}{X}(t)$ — центрированный стационарный случайный процесс с корреляционной функцией $B_{\overset{\circ}{x}}(\tau)$; $k_{АМ}$ — крутизна модуляционной характеристики.

2. Балансная амплитудная модуляция (БАМ)

$$s_{БАМ}(t) = k_{АМ} \overset{\circ}{X}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{1.10}$$

3. Однополосная амплитудная модуляция (ОБП)

$$s_{ОБП}(t) = k_{АМ} \overset{\circ}{X}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - k_{АМ} \overset{\wedge}{\overset{\circ}{X}}(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{1.11}$$

Здесь $\overset{\wedge}{\overset{\circ}{X}}(t)$ — процесс, сопряженный по Гильберту процессу $X(t)$ (см. § 1.2).

Заметим, что энергетический спектр (а следовательно, и корреляционная функция) сопряженного по Гильберту процесса $X(t)$

совпадает с энергетическим спектром (корреляционной функцией) случайного процесса $\overset{\circ}{X}(t)$ [15]:

$$G_{\hat{\overset{\circ}{x}}}(f) = G_{\overset{\circ}{x}}(f); \quad B_{\hat{\overset{\circ}{x}}}(\tau) = B_{\overset{\circ}{x}}(\tau). \tag{1.12}$$

Сигнал ОБП можно также представить в виде

$$s_{\text{ОБП}}(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi_0 - \psi(t)], \tag{1.13}$$

где

$$A(t) = k_{\text{АМ}}\sqrt{\overset{\circ}{X}{}^2(t) + \hat{\overset{\circ}{X}}{}^2(t)}; \quad \psi(t) = \operatorname{arc\,tg}\frac{\hat{\overset{\circ}{X}}(t)}{\overset{\circ}{X}(t)}. \tag{1.14}$$

4. Угловая модуляция

В общем случае сигнал с угловой модуляцией можно представить так:

$$s_{\text{УМ}}(t) = U_m\cos(\omega_0 t + \Phi(t) + \varphi_0). \tag{1.15}$$

Здесь $\Phi(t)$ — случайный процесс, связанный с модулирующим процессом $\overset{\circ}{X}(t)$ следующими соотношениями:

$$\Phi(t) = k_{\text{ФМ}}\overset{\circ}{X}(t) \tag{1.16}$$

при фазовой модуляции (ФМ):

$$\Phi(t) = k_{\text{ЧМ}}\int\limits_0^t \overset{\circ}{X}(t_1)dt_1 \tag{1.17}$$

при частотной модуляции (ЧМ).

Если модулирующий процесс $\overset{\circ}{X}(t)$ принимает ряд дискретных значений, то информационные параметры несущей при модуляции меняются скачком. В этом случае говорят о дискретной модуляции или манипуляции.

При случайном модулирующем сигнале $X(t)$ модулированный процесс также является случайным, причем нестационарным даже при стационарном процессе $\overset{\circ}{X}(t)$. Усредненный энергетический спектр такого процесса может быть найден как преобразование Фурье от усредненной во времени корреляционной функции процесса.

Задачи

1.1.1. Показать, что случайный синхронный телеграфный сигнал, реализации которого имеют случайный равномерно распределенный сдвиг Δt относительно начала координат (рис. 1.1), принимающий в дискретные моменты времени кратные T значения $\pm h$ с вероятностью 0,5 независимо от того, какое значение он имел на предыдущем участке, имеет корреляционную функцию $B_x^{\circ}(\tau)=h^2(1-|\tau|/T)$ и энергетический спектр $G_x(f)=$ $=h^2T\,\dfrac{\sin^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2}$.

Определить интервал корреляции этого процесса $\tau_к$, ширину энергетического спектра $F_э$ и произведение $F_э\tau_к$.

1.1.2. Белым шумом называется случайный процесс, имеющий равномерную спектральную плотность $G(f)=$ $=G_ш/2$ в неограниченной полосе частот. Показать, что функция корреляции такого процесса есть δ-функция, а его дисперсия $\sigma^2=B(0)=\infty$.

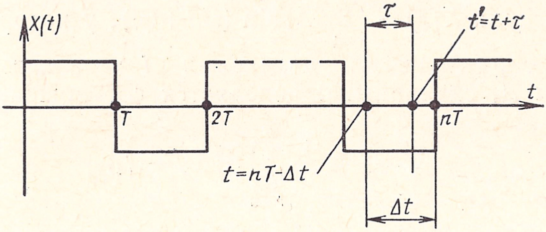


Рис. 1.1. Реализация случайного синхронного телеграфного сигнала

1.1.3. Найти корреляционную функцию шума, имеющего равномерную спектральную плотность, равную $G_ш/2$ в полосе $(-F,\ F)$ и 0 вне этой полосы.

1.1.4. Если на вход интегрирующей RC-цепочки поступает нормальный стационарный белый шум, то процесс на выходе стационарен, гауссов и имеет функцию корреляции [15]

$$B(\tau)=B(0)\exp(-\beta\,|\,\tau\,|\,),\ \ \beta=1/RC.$$

Выходной процесс можно именовать одномерным марковским. Найти энергетический спектр этого процесса, определить полосу частот $F_э$ и произведение $F_э\tau_к$.

1.1.5. Найти энергетический спектр случайного процесса, имеющего корреляционную функцию гауссового вида

$$B(\tau)=B(0)\exp(-\beta^2\tau^2),$$

определить его ширину $F_э$ и произведение $F_э\tau_к$.

1.1.6. Показать, что энергетический спектр случайного стационарного процесса $Y(t)$ с корреляционной функцией $B_y(\tau)=B_x(\tau)\cos\omega_0\tau$ определяется на положительных частотах [при $f_0 \gg F_э$, $F_э$ — ширина спектра процесса с корреляционной функцией $B_x(\tau)$] соотношением

$$G_{y0}(f) = G_x(f - f_0),$$

где $G_x(f)$ — энергетический спектр стационарного процесса с корреляционной функцией $B_x(\tau)$.

1.1.7. Показать, что энергетический спектр случайного сигнала $Z(t) = \sum\limits_{i-1}^{n} A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$, у которого слагаемые с различными индексами i независимы, амплитуды A_i случайны, определяется соотношением

$$\overset{*}{G}_0(f) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} \overline{A_i^2}\,\delta(f - f_i)$$

при любом законе распределения фаз.

1.1.8. Найти усредненную корреляционную функцию и усредненный энергетический спектр амплитудно-модулированного процесса при модуляции случайным стационарным процессом $\overset{\circ}{X}(t)$.

1.1.9. Найти усредненный энергетический спектр и усредненную корреляционную функцию для сигнала БАМ, если модуляция осуществляется случайным процессом $\overset{\circ}{X}(t)$ с корреляционной функцией

$$B_{\overset{\circ}{x}}(\tau) = B(0)\,e^{-\alpha|\tau|}.$$

1.1.10. Найти усредненную корреляционную функцию и усредненный энергетический спектр сигнала однополосной амплитудной модуляции.

1.1.11. Найти усредненный энергетический спектр ФМ колебания при модуляции нормальным случайным процессом с энергетическим спектром $G_x(f)$ при условии, что $k^2_{\text{ФМ}} B_x(0) \ll 1$ («слабый» модулирующий сигнал).

1.1.12. Показать, что при фазовой модуляции гармонической несущей нормальным случайным процессом с энергетическим спектром $G_x(f)$ усредненный энергетический спектр модулированного процесса определяется на положительных частотах выражением

$$\overset{*}{G}_{\text{ОФМ}}(f) = \frac{U_m^2}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{k^2_{\text{ФМ}}\, B_x(0) a^2}}\,\exp\left[-\frac{2\pi^2 (f - f_0)^2}{k^2_{\text{ФМ}}\, B_x(0) a^2}\right],$$

$$a^2 = \frac{(2\pi)^2}{B_x(0)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_x(f) f^2 df,$$

если $k^2_{\text{ФМ}} B_x(0) \gg 1$ («сильный» модулирующий сигнал).

1.1.13. Показать, что при $k^2_{\text{ЧМ}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{G(f)}{(2\pi f)^2}\, df \gg 1$ («сильный» модулирующий сигнал) усредненный энергетический спектр ЧМ

$$\overset{*}{G}_{\text{ОЧМ}}(f) = \frac{U_m^2}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{k^2_{\text{ЧМ}} B_x(0)}} \exp\left[-\frac{2\pi^2 (f-f_0)^2}{k^2_{\text{ЧМ}} B_x(0)}\right].$$

1.1.14. Показать, что отношение ширины полосы частот ФМ и ЧМ сигнала, рассмотренных в задачах 1.1.12 и 1.1.13 при равномерном в полосе частот F_1, F_2 энергетическом спектре модулирующего сигнала и выполнении условия $k_{\text{ЧМ}} = k_{\text{ФМ}} 2\pi F_1$ определяется формулой

$$\frac{F_{\text{эФМ}}}{F_{\text{эЧМ}}} = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{F_2}{F_1} + \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2\right].$$

1.1.15. Найти усредненную корреляционную функцию и усредненный энергетический спектр сигнала АМ при манипуляции синусоидального колебания двоичным случайным синхронным телеграфным сигналом $\overset{\circ}{X}(t)$ с корреляционной функцией $B_{\overset{\circ}{x}}(\tau) = h^2\left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)$.

1.1.16. Показать, что усредненный энергетический спектр процесса ФМ при фазовой модуляции на угол π синусоидального колебания случайным двоичным синхронным телеграфным сигналом определяется формулой

$$\overset{*}{G}_{\text{ОФМ}}(f) = U_m^2 T \frac{\sin^2 (\omega - \omega_0)\frac{T}{2}}{\left[(\omega - \omega_0)\frac{T}{2}\right]^2},$$

если средняя мощность сигнала ФМ такая же, как сигнала АМ из задачи 1.1.15.

1.1.17. Найти усредненную корреляционную функцию и усредненный энергетический спектр сигнала ЧМ при манипуляции гармонической несущей синхронным двоичным случайным телеграфным сигналом.

Решения и ответы

Р.1.1.1. Найдем среднее значение процесса $\overline{X(t)} = -0{,}5\,h + 0{,}5\,h = 0$. Следовательно, $B_x^\circ(t,\ t+\tau) = \overline{X(t)X(t+\tau)}$.

Зафиксируем произвольный момент времени t (см. рис. 1.1). Интервал, отделяющий точку t от ближайшей точки, в которой может произойти изменение знака процесса $X(t)$, распределен по условию задачи равномерно в промежутке $(0,\ T)$:

$$w_1(\Delta t) = 1/T,\ 0 \leqslant \Delta t \leqslant T.$$

Рассмотрим сечение процесса $X(t)$ в моменты t и $t+\tau$ при $\tau \neq 0$. Если $\tau < \Delta t \leqslant T$, то $\overline{X(t)X(t+\tau)} = h^2$. Если же $\tau > \Delta t$, то $\overline{X(t)X(t+\tau)} = 0{,}5\ h^2 - 0{,}5\ h^2 = 0$. Поэтому

$$B_x^\circ(t,\ t+\tau) = P(\tau < \Delta t)\,h^2 + P(\tau > \Delta t)\,0 =$$

$$= h^2 \int\limits_\tau^T w_1(\Delta t)\,d(\Delta t) = h^2\left(1 - \frac{\tau}{T}\right).$$

Распространяя это выражение и на $\tau < 0$, получаем $B_x^\circ(\tau) = h^2\left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)$. Подставив найденное выражение для $B_x^\circ(\tau)$ в ф-лу (1.7), получим $\tau_к = T/2$.

Подставив выражение для $B_x^\circ(\tau)$ в ф-лу (1.1), получим

$$G(f) = 2h^2 \int\limits_0^\infty \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \cos \omega\tau\, d\tau.$$

Интегрируя, находим результат

$$G(f) = h^2 T\, \frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2}.$$

Ширину энергетического спектра найдем согласно (1.6), приняв во внимание, что $G_0(f) = 2G(f)$:

$$F_э = \frac{B(0)}{G_{0\,макс}} = \frac{h^2}{2h^2\,T} = \frac{1}{2T}.$$

Произведение $F_э\,\tau_к = \frac{1}{2T}\ \frac{T}{2} = \frac{1}{4}$.

Отметим, что на частотах, кратных величине $1/T$, энергетический спектр синхронного случайного телеграфного сигнала имеет нулевые значения.

Р.1.1.2. В соответствии с ф-лой (1.2) $B(\tau)=$ $=\frac{1}{2}G_{ш}\int\limits_{-8}^{\infty}\cos 2\pi f\tau df$. Так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos 2\pi f\tau dt=\delta(\tau)$ [15], для корреляционной функции белого шума получим

$$B(\tau)=\frac{1}{2}G_{ш}\delta(\tau),\ \sigma^2=B(0)=\infty.$$

Р.1.1.3. По ф-ле (1.2)

$$B(\tau)=G_{ш}\int\limits_{0}^{F}\cos 2\pi f\tau df.$$

Интегрируя, получаем

$$B(\tau)=G_{ш}\frac{\sin 2\pi F\tau}{2\varphi F\tau}.$$

Обратим внимание на то, что у рассматриваемого случайного процесса, имеющего равномерный энергетический спектр в полосе $(-F,\ F)$, сечения, разнесенные на интервал τ, кратный величине $1/2F$, не коррелированы.

Р.1.1.4. Согласно (1.2), используя табличный интеграл [6], получаем $G(f)=2B(0)\int\limits_{0}^{\infty}\exp(-\beta\tau)\cos\omega\tau d\tau=$ $=2B(0)\frac{\beta}{\beta^2+4\pi^2 f^2}$. Ширина энергетического спектра процесса $F_э=\frac{B(0)}{G_{0макс}}=\frac{B(0)}{4B\cdot(0)}\beta=\frac{\beta}{4}$, а время корреляции $\tau_к=\int\limits_{0}^{\infty}\exp(-\beta\tau)d\tau=\frac{1}{\beta}$. Произведение $F_э\tau_к=\frac{1}{4}$.

Р.1.1.5.

$$G(f)=\frac{B(0)}{2\beta\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{\beta^2}\right).$$

Обратим внимание на то, что случайный процесс с корреляционной функцией гауссового вида имеет и энергетический спектр гауссового вида. Ширина энергетического спектра $F_э=\beta\sqrt{\pi}$. Интервал корреляции по (1.7) $\tau_к=\sqrt{\pi}/2\beta$. Произведение $F_э\tau_к=\pi/2\approx 1{,}57$.

Р.1.1.6. Согласно (1.1)

$$G_y(f)=2\int\limits_{0}^{\infty}B_x(\tau)\cos\omega_0\tau\cos\omega\tau d\tau=\frac{1}{2}\left(2\int\limits_{0}^{\infty}B_x(\tau)\cos(\omega+\right.$$

$$+\omega_0)\tau d\tau + 2\int_0^\infty B_x(\tau)\cos(\omega-\omega_0)\tau d\tau\Bigg).$$

Но согласно (1.1) $2\int_0^\infty B_x(\tau)\cos(\omega\pm\omega_0)\tau d\tau = G_x(f\pm f_0)$.

Поэтому

$$G_y(f)=\frac{1}{2}G_x(f+f_0)+\frac{1}{2}G_x(f-f_0).$$

Поскольку энергетический спектр $G_x(f)$ является четной функцией частоты, то при выполнении условия $f_0 \gg F_э$ одинаковые по форме спектры $G_x(f+f_0)$ и $G_x(f-f_0)$ расположены соответственно в области отрицательных и положительных частот симметрично относительно оси ординат (нуля). Поэтому энергетический спектр на положительных частотах $G_{0y}(f)=G_x(f-f_0)$, $f>0$.

Р.1.1.7. Найдем корреляционную функцию процесса $Z(t)$:

$$B_z(t,\ t+\tau)=\overline{Z(t)Z(t+\tau)}=\overline{\sum_{i=1}^{n}A_i\sin(\omega_i t+\varphi_i)\times}$$

$$\overline{\times\sum_{i=1}^{n}A_i\sin[\omega_i(t+\tau)+\varphi_i]}.$$

Так как слагаемые с различными индексами независимы, все перекрестные члены этого произведения вида

$$\overline{A_i\sin(\omega_i t+\varphi_i)A_k\sin[\omega_k(t+\tau)+\varphi_k]}=0,\ i\neq k.$$

Поэтому

$$\overline{Z(t)Z(t+\tau)}=\overline{\sum_{i=1}^{n}A_i^2\sin(\omega_i t+\varphi_i)\sin[\omega_i(t+\tau)+\varphi_i]}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\overline{A_i^2}\{\cos\omega_i\tau-\cos[\omega_i(2t+\tau)+2\varphi_i]\}.$$

Усредняя по времени, получаем для усредненной корреляционной функции

$$\overset{*}{B}_z(\tau)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\overline{A_i^2}\cos\omega_i\tau.$$

Спектральная плотность мощности согласно (1.1)

$$\overset{*}{G}(f) = 2\int\limits_0^\infty \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \overline{A_i^2} \cos\omega_i\tau \cos\omega\tau\, d\tau =$$

$$= 2\int\limits_0^\infty \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \overline{A_i^2} \left[\cos(\omega - \omega_i)\tau + \cos(\omega + \omega_i)\tau\right] d\tau.$$

Меняя порядок интегрирования и суммирования, с учетом определения δ-функции [15] получаем

$$\overset{*}{G}(f) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \overline{A_i^2} \left[\delta(f - f_i) + \delta(f + f_i)\right].$$

При определении спектральной плотности мощности только по положительным частотам имеем

$$\overset{*}{G}_0(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \overline{A_i^2}\, \delta(f - f_i).$$

Р.1.1.8. Согласно ф-ле (1.4) корреляционная функция амплитудно-модулированного колебания

$$B_{AM}(t,\ t+\tau) = \overline{s_{AM}(t)\, s_{AM}(t+\tau)} = U_m\left[1 + \frac{k_{AM}}{U_m}\overset{\circ}{X}(t)\right] \times$$

$$\times \cos(\omega_0 t + \varphi_0)\, U_m\left[1 + \frac{k_{AM}}{U_m}\overset{\circ}{X}(t+\tau)\right] \cos\left[\omega_0(t+\tau) + \varphi_0\right] =$$

$$= k_{AM}^2 B_{\overset{\circ}{x}}(\tau) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cos\left[\omega_0(t+\tau) + \varphi_0\right] +$$

$$+ U_m^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cos\left[\omega_0(t+\tau) + \varphi_0\right].$$

Усредняя полученное выражение по t, находим

$$\overset{*}{B}_{AM}(\tau) = \frac{k_{AM}^2}{2} B_{\overset{\circ}{x}}(\tau) \cos\omega_0\tau + \frac{U_m^2}{2} \cos\omega_0\tau.$$

В этом выражении первое слагаемое представляет собой корреляционную функцию случайной составляющей АМ колебания, а второе — корреляционную функцию несущего колебания.

Воспользовавшись Р.1.1.6 и ф-лой (1.5), можно убедиться, что найденной корреляционной функции соответствует на положительных частотах энергетический

071008

[illegible] завод

спектр

$$\overset{*}{G}_{0АМ}(f) = \frac{U_m^2}{2}\,\delta(f - f_0) + \frac{k_{АМ}^2}{2}\,G_{\overset{\circ}{x}}(f - f_0).$$

В этом выражении $G_{\overset{\circ}{x}}(f)$ — энергетический спектр модулирующего процесса. Таким образом, энергетический спектр АМ сигнала содержит несущее колебание на частоте f_0 и две боковые полосы, спектр которых определяется выражением $\frac{k^2_{АМ}}{2} G_x(f - f_0)$.

Р.1.1.9. Сравнивая (1.9) и (1.10), легко заметить, что процесс при БАМ есть не что иное, как центрированное амплитудно-модулированное колебание. Поэтому с учетом результата задачи 1.1.8 можно записать

$$\overset{*}{B}_{БАМ}(\tau) = \frac{k_{АМ}^2}{2}\,B_{\overset{\circ}{x}}(\tau)\cos\omega_0\tau$$

и

$$\overset{*}{G}_{0БАМ}(f) = \frac{k_{АМ}^2}{2}\,G_{\overset{\circ}{x}}(f - f_0).$$

Подставляя в выражение для $\overset{*}{B}_{БАМ}(\tau)$ значение корреляционной функции модулирующего процесса, получаем

$$\overset{*}{B}_{БАМ}(\tau) = \frac{k_{АМ}^2}{2}\,B_{\overset{\circ}{x}}(0)\,e^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_0\tau.$$

Усредненный энергетический спектр

$$\overset{*}{G}_{0БАМ}(f) = k_{АМ}^2\,B_{\overset{\circ}{x}}(0)\,\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2}\,.$$

Р.1.1.10 Используя ф-лу (1.11), определяем

$$B_{ОБП}(t,\ t+\tau) = \overline{s_{ОБП}(t)\,s_{ОБП}(t+\tau)} = k_{АМ}^2\,B_{\overset{\circ}{x}}(\tau)\cos(\omega_0 t + \varphi)\cos[\omega_0(t+\tau) + \varphi_0] + k_{АМ}^2\,B_{\hat{\overset{\circ}{x}}}(\tau)\sin(\omega_0 t + \varphi_0)\sin \times [\omega_0(t+\tau) + \varphi_0] - k_{АМ}^2\,B_{\overset{\circ}{x}\hat{\overset{\circ}{x}}}(\tau)\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\sin[\omega_0(t + \tau) + \varphi_0] - k_{АМ}^2\,B_{\hat{\overset{\circ}{x}}\overset{\circ}{x}}(\tau)\sin(\omega_0 t + \varphi_0)[\cos\omega_0(t+\tau) + \varphi_0].$$

Осуществляя усреднение по времени, получаем

$$\overset{*}{B}_{\text{ОБП}}(\tau)=\frac{k^2_{\text{АМ}}}{2}B_{\overset{\circ}{x}}(\tau)\cos\omega_0\tau+\frac{k^2_{\text{АМ}}}{2}B_{\hat{\overset{\circ}{x}}}(\tau)\cos\omega_0\tau-$$

$$-\frac{k^2_{\text{АМ}}}{2}B_{\overset{\circ}{x}\hat{\overset{\circ}{x}}}(\tau)\sin\omega_0\tau+\frac{k^2_{\text{АМ}}}{2}B_{\hat{\overset{\circ}{x}}\overset{\circ}{x}}(\tau)\sin\omega_0\tau.$$

Приняв во внимание (1.12), а также, что $B_{\overset{\circ}{x}\hat{\overset{\circ}{x}}}(\tau)=-B_{\hat{\overset{\circ}{x}}\overset{\circ}{x}}(\tau)$ [15], найдем

$$\overset{*}{B}_{\text{ОБП}}(\tau)=k^2_{\text{АМ}}B_{\overset{\circ}{x}}(\tau)\cos\omega_0\tau-k^2_{\text{АМ}}B_{\overset{\circ}{x}\hat{\overset{\circ}{x}}}(\tau)\sin\omega_0\tau.$$

Для энергетического спектра при ОБП имеем

$$\overset{*}{G}_{\text{ОБП}}(f)=k^2_{\text{АМ}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_{\overset{\circ}{x}}(\tau)\cos\omega_0\tau\, e^{i\omega\tau}\,d\tau-$$

$$-k^2_{\text{АМ}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_{\overset{\circ}{x}\hat{\overset{\circ}{x}}}(\tau)\sin\omega_0\tau\, e^{-i\omega\tau}\,d\tau.$$

После простых преобразований находим

$$\overset{*}{G}_{\text{ОБП}}(f)=\frac{k^2_{\text{АМ}}}{2}\Big[G_{\overset{\circ}{x}}(f-f_0)+G_{\overset{\circ}{x}}(f+f_0)+i\,G_{\overset{\circ}{x}\hat{\overset{\circ}{x}}}(f-f_0)-$$

$$-i\,G_{\overset{\circ}{x}\hat{\overset{\circ}{x}}}(f+f_0)\Big].$$

Здесь $G_{\overset{\circ}{x}\hat{\overset{\circ}{x}}}(f)$ — взаимный энергетический спектр двух сопряженных процессов. Известно [15], что

$$G_{\overset{\circ}{x}\hat{\overset{\circ}{x}}}(f)=\begin{cases}-i\,G_{\overset{\circ}{x}}(f) & f>0,\\ i\,G_{\overset{\circ}{x}}(f) & f<0.\end{cases}$$

С учетом этого

$$\overset{*}{G}_{\text{ОБП}}(f)=\begin{cases}\dfrac{k^2_{\text{АМ}}}{2}\left[2G_{\overset{\circ}{x}}(f-f_0)+2G_{\overset{\circ}{x}}(f+f_0)\right] & \text{при } |f|>|f_0|,\\ 0 & \text{при } |f|<|f_0|.\end{cases}$$

При определении спектра процесса ОБП только по положительным частотам

$$\overset{*}{G}_{0\text{ОБП}}(f)=\begin{cases}2k^2_{\text{АМ}}G_{\overset{\circ}{x}}(f-f_0) & \text{при } f>f_0,\\ 0 & \text{при } f<f_0.\end{cases}$$

Р.1.1.11. Представим процесс ФМ соотношением

$$s_{\text{ФМ}}(t) = U_m \cos\left[\omega_0 t + k_{\text{ФМ}} \mathring{X}(t) + \varphi_0\right].$$

Корреляционную функцию найдем как

$$B_{\text{ФМ}}(t,\ t+\tau) = \overline{s_{\text{ФМ}}(t)\, s_{\text{ФМ}}(t+\tau)} =$$

$$\overline{= \frac{U_m^2}{2}\left\{\cos\left[2\omega_0 t + \omega_0\tau + 2\varphi_0 + k_{\text{ФМ}} \mathring{X}(t) + k_{\text{ФМ}} \mathring{X}(t+\tau)\right] + \right.}$$

$$\left. \overline{+ \cos\left[\omega_0\tau - k_{\text{ФМ}} \mathring{X}(t) + k_{\text{ФМ}} \mathring{X}(t+\tau)\right]}\right\}.$$

Выполняя усреднение по времени, получаем

$$\overset{*}{B}_{\text{ФМ}}(\tau) = \frac{U_m^2}{2}\, \widetilde{M\{\cos\left[\omega_0\tau - \Theta(t,\ \tau)\right]\}} =$$

$$= \frac{U_m^2}{2} \cos\omega_0\tau\, \widetilde{M\left[\cos\Theta(t,\tau)\right]} + \frac{U_m^2}{2} \sin\omega_0\tau\, \overline{M\left[\sin\Theta(t,\tau)\right]}.$$

Здесь обозначено $\theta(t,\ \tau) = k_{\text{ФМ}}\left[\mathring{X}(t+\tau) - \mathring{X}(t)\right]$. Если одномерное распределение величины $\theta(t,\ \tau)$ является четной функцией, то

$$M\left[\sin\Theta(t,\ \tau\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin\Theta(t,\tau)\, w_1(\Theta)\, d\Theta = 0.$$

Поэтому при нормальном модулирующем процессе усредненная корреляционная функция сигнала с фазовой модуляцией

$$\overset{*}{B}_{\text{ФМ}}(\tau) = \frac{U_m^2}{2}\, \widetilde{M\left[\cos\Theta(t,\tau)\right]} \cos\omega_0\tau.$$

Поскольку величина $\theta(t,\ \tau)$ распределена по нормальному закону как линейное преобразование модулирующего сигнала $\mathring{X}(t)$, для математического ожидания $\cos\theta(t,\ \tau)$ используя [6], находим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\Theta\, w_1(\Theta)\, d\Theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\Theta^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\Theta^2}{2\sigma_\Theta^2}\right) \times$$

$$\times \cos\Theta\, d\Theta = \exp\left(-\frac{\sigma_\Theta^2}{2}\right).$$

Найдем дисперсию величины $\theta(t, \tau)$. Так как при фазовой модуляции $\theta(t, \tau)=k_{\text{ФМ}}[\overset{\circ}{X}(t+\tau)-\overset{\circ}{X}(t)]$, то

$$\sigma_\theta^2 = k_{\text{ФМ}}^2 \overline{[\overset{\circ}{X}(t+\tau) - \overset{\circ}{X}(\tau)]^2} = k_{\text{ФМ}}^2 [\overline{\overset{\circ}{X}{}^2(t+\tau)} + \overline{\overset{\circ}{X}{}^2(t)} -$$

$$- 2\overline{\overset{\circ}{X}(t)\,\overset{\circ}{X}(t+\tau)}] = 2k_{\text{ФМ}}^2 B_{\overset{\circ}{x}}(0)\,[1 - R_{\overset{\circ}{x}}(\tau)].$$

В этом случае усредненная корреляционная функция модулированного сигнала

$$\overset{*}{B}_{\text{ФМ}}(\tau) = \frac{U_m^2}{2}\cos\omega_0\tau\,\exp\left\{-k_{\text{ФМ}}^2 B_{\overset{\circ}{x}}(0)\,[1 - R_{\overset{\circ}{x}}(\tau)]\right\}.$$

Такой корреляционной функции соответствует энергетический спектр

$$\overset{*}{G}_{\text{ФМ}}(f) = \frac{U_m^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\omega_0\tau\cos\omega\tau\,\exp\left\{-k_{\text{ФМ}}^2 B_{\overset{\circ}{x}}(0)\,\times\right.$$

$$\left.\times\,[1 - R_{\overset{\circ}{x}}\,\tau]\right\}d\tau.$$

Рассмотрим энергетический спектр ФМ процесса при $k^2{}_{\text{ФМ}}B_x(0) \ll 1$. В этом случае $\exp[k_{\text{ФМ}}B_{\overset{\circ}{x}}(0)R_{\overset{\circ}{x}}(\tau)]$ можно представить рядом

$$\exp[k_{\text{ФМ}}^2 B_{\overset{\circ}{x}}(0)\,R_{\overset{\circ}{x}}(\tau)] = 1 + k_{\text{ФМ}}^2 B_{\overset{\circ}{x}}(\tau) + \frac{[k_{\text{ФМ}}^2 B_{\overset{\circ}{x}}(\tau)]^2}{2!} +$$

$$+ \frac{[k_{\text{ФМ}}^2 B_{\overset{\circ}{x}}(\tau)]^3}{3!} + \ldots$$

Ограничиваясь первыми двумя членами этого разложения, получаем усредненную корреляционную функцию

$$\overset{*}{B}_{\text{ФМ}}(\tau) = \frac{U_m^2}{2}[1 + k_{\text{ФМ}}^2 B_{\overset{\circ}{x}}(\tau)]\cos\omega_0\tau\,\exp[-k_{\text{ФМ}}^2 B_{\overset{\circ}{x}}(0)].$$

Этой корреляционной функции соответствует энергетический спектр на положительных частотах

$$\overset{*}{G}_{0\text{ФМ}}(f) = \frac{U_m^2}{2}\,e^{-k_{\text{ФМ}}^2 B_{\overset{\circ}{x}}(0)}\,\delta(f - f_0) + \frac{k_{\text{ФМ}}^2 U_m^2}{2}\,e^{-k_{\text{ФМ}}^2 B_{\overset{\circ}{x}}(0)}\,\times$$

$$\times\,G_{\overset{\circ}{x}}(f - f_0).$$

Полезно отметить, что этот спектр по своей структуре совпадает со спектром при амплитудной модуляции.

Р.1.1.12. Воспользуемся общими соотношениями для усредненных корреляционной функции и энергетического спектра сигнала с фазовой модуляцией, полученными в предыдущей задаче:

$$\overset{*}{B}_{\text{ФМ}}(\tau)=\frac{U_m^2}{2}\cos\omega_0\tau\exp\left[-k_{\text{ФМ}}^2B_{\overset{\circ}{x}}(0)+k_{\text{ФМ}}^2B_{\overset{\circ}{x}}(\tau)\right];$$

$$\overset{*}{G}_{\text{ФМ}}(f)=\frac{U_m^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\omega_0\tau\cos\omega\tau\exp\left[-k_{\text{ФМ}}^2B_{\overset{\circ}{x}}(0)+\right.$$
$$\left.+k_{\text{ФМ}}^2B_{\overset{\circ}{x}}(\tau)\right]d\tau.$$

Если $k^2{}_{\text{ФМ}}B_{\overset{\circ}{x}}(0)\gg 1$, то $R_{\overset{\circ}{x}}(\tau)=\dfrac{B_{\overset{\circ}{x}}(\tau)}{B_{\overset{\circ}{x}}(0)}$

целесообразно разложить в ряд Маклорена:

$$R_{\overset{\circ}{x}}(\tau)=1+\frac{R_{\overset{\circ}{x}}^{(2)}(0)\,\tau^2}{2!}+\frac{R_{\overset{\circ}{x}}^{(4)}(0)\,\tau^4}{4!}+\ldots.$$

Вторая производная $R_{\overset{\circ}{x}}(\tau)=\dfrac{1}{B_{\overset{\circ}{x}}(0)}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_{\overset{\circ}{x}}(f)\cos\omega\tau\,df$

при $\tau=0$ определяется соотношением

$$R_{\overset{\circ}{x}}^{(2)}(0)=-\frac{(2\pi)^2}{B_{\overset{\circ}{x}}(0)}\int\limits_{-\infty}^{8}G_{\overset{\circ}{x}}(f)\,f^2df=-a^2.$$

При $k^2{}_{\text{ФМ}}B_{\overset{\circ}{x}}(0)\gg 1$ ненулевые значения

$$\overset{*}{B}_{\text{ФМ}}(\tau)=\frac{U_m^2}{2}\cos\omega_0\tau\exp\left[-k_{\text{ФМ}}^2B_{\overset{\circ}{x}}(0)+k_{\text{ФМ}}^2B_{\overset{\circ}{x}}(\tau)\right]$$

лежат в области, где $R_{\overset{\circ}{x}}(\tau)\approx 1$, т. е. $\tau\approx 0$.

Сохраняя поэтому только первые два члена разложения коэффициента корреляции, находим

$$\overset{*}{B}_{\text{ФМ}}(\tau)=\frac{U_m^2}{2}\cos\omega_0\tau\exp\left[-\frac{k_{\text{ФМ}}^2B_{\overset{\circ}{x}}(0)}{2}a^2\tau^2\right],$$

$$a^2=\frac{(2\pi^2)}{B_{\overset{\circ}{x}}(0)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_{\overset{\circ}{x}}(f)\,f^2\,df.$$

Корреляционной функции гауссовой формы

$$B(\tau)=\exp\left[-\frac{k_{\text{ФМ}}^2B(0)}{2}a^2\tau^2\right]$$

соответствует энергетический спектр той же формы (см. Р.1.1.5)

$$G(f) = \sqrt{\frac{2\pi}{k^2_{\text{ФМ}}\, B(0)\, a^2}} \exp\left[-\frac{2\pi^2 f^2}{k^2_{\text{ФМ}}\, B(0)\, a^2}\right].$$

Умножение корреляционной функции на $\cos\omega_0\tau$ соответствует переносу спектра $G(f)$ вправо и влево (в область отрицательных частот) на величину f_0 (см. Р.1.1.6).

Таким образом, при фазовой модуляции несущей сильным сигналом энергетический спектр на положительных частотах

$$\overset{*}{G}_{0\text{ФМ}}(f) = \frac{U_m^2}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{k^2_{\text{ФМ}}\, B_{\overset{\circ}{x}}(0)\, a^2}} \exp\left[-\frac{2\pi^2 (f-f_0)^2}{k^2_{\text{ФМ}}\, B_{\overset{\circ}{x}}(0)\, a^2}\right].$$

В составе спектра нет дискретных компонент, а его форма является гауссовой независимо от формы энергетического спектра модулирующего процесса.

Р.1.1.13. Процесс частотной модуляции случайным сигналом $\overset{\circ}{X}(t)$ эквивалентен процессу фазовой модуляции случайным сигналом $\overset{\circ}{Z}(t) = \frac{k_{\text{ЧМ}}}{k_{\text{ФМ}}}\int\limits_0^t \overset{\circ}{X}(t_1)\, dt_1$ [(см. (1.16) и (1.17)]. Усредненный энергетический спектр сигнала $\overset{\circ}{Z}(t)$ связан с энергетическим спектром сигнала $\overset{\circ}{X}(t)$ соотношением

$$\overset{*}{G}_{\overset{\circ}{z}}(f) = \frac{k^2_{\text{ЧМ}}}{k^2_{\text{ФМ}}}\,\frac{G_{\overset{\circ}{x}}(f)}{4\pi^2 f^2},$$

так как коэффициент передачи идеального интегратора по мощности равен $1/4\pi^2 f^2$. Вследствие этого при определении усредненного энергетического спектра ЧМ сигнала можно использовать соотношения, полученные для фазовой модуляции, подставив в них вместо $G_{\overset{\circ}{x}}(f)$ спектр $G_{\overset{\circ}{z}}(f) = \frac{k^2_{\text{ЧМ}}}{k^2_{\text{ФМ}}}\,\frac{G_{\overset{\circ}{x}}(f)}{4\pi^2 f^2}$. С учетом Р.1.1.12 получим при $k^2_{\text{ЧМ}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{G_{\overset{\circ}{x}}(f)}{4\pi^2 f^2}\,df \gg 1$ $\left(k^2_{\text{ФМ}}\, B_{\overset{\circ}{z}}(0) \gg 1\right)$ величину

$$\overset{*}{G}_{0\text{ЧМ}}(f) = \frac{U_m^2}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{k^2_{\text{ЧМ}}\, B_{\overset{\circ}{x}}(0)}} \exp\left[-\frac{2\pi^2 (f-f_0)^2}{k^2_{\text{ЧМ}}\, B_{\overset{\circ}{x}}(0)}\right],$$

если учесть, что при ЧМ

$$a^2 = \frac{k^2_{\text{ЧМ}}}{k^2_{\text{ФМ}}} \frac{1}{\overset{\circ}{B}_x(0)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{\circ}{G}_x(f)}{4\pi^2 f^2} 4\pi^2 f^2 df = \frac{k^2_{\text{ЧМ}}}{k^2_{\text{ФМ}}}.$$

Р.1.1.14. Имея в виду Р.1.1.5, легко заметить, что при гауссовой форме энергетического спектра полосы частот $F_{\text{э.ФМ}}$ и $F_{\text{э.ЧМ}}$ относятся между собой как показатели соответствующих экспонент. Поэтому, используя результаты Р.1.1.12 и Р.1.1.13, получаем

$$\frac{F_{\text{эФМ}}}{F_{\text{эЧМ}}} = \frac{4\pi^2 k^2_{\text{ФМ}}}{k^2_{\text{ЧМ}}} \frac{\int\limits_{F_1}^{F_2} G_0 f^2 df}{\int\limits_{F_1}^{F_2} G_0 df} = \frac{4\pi^2 k^2_{\text{ФМ}}}{3k^2_{\text{ЧМ}}} [F_1^2 + F_2^2 + F_1 F_2].$$

При выполнении условия $k_{\text{ЧМ}} = k_{\text{ФМ}} 2\pi F_1$

$$\frac{F_{\text{эФМ}}}{F_{\text{эЧМ}}} = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{F_2}{F_1} + \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2\right].$$

Если, например, $F_2/F_1 \approx 10$ (как в стандартном телефонном канале), то $F_{\text{эФМ}}/F_{\text{эЧМ}} \approx 37$ и полоса частот ФМ сигнала оказывается существенно шире, чем при ЧМ.

Р.1.1.15. Можно воспользоваться Р.1.1.8, если положить $k_{\text{АМ}} h = U_m$. При этом амплитуда излучаемого импульса $A = 2U_m$, а средняя мощность излучаемого сигнала $P_c = \frac{1}{2}\left(\frac{A^2}{2}\right) = U^2_m$. Тогда

$$\overset{\circ}{B}_{\text{АМ}}(\tau) = \frac{U_m^2}{2}\left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)\cos\omega_0\tau + \frac{U_m^2}{2}\cos\omega_0\tau.$$

Выполнив преобразование Фурье, получим с учетом Р.1.1.1 и Р.1.1.6

$$\overset{\circ}{G}_{0\text{АМ}}(f) = \frac{U_m^2}{2}\delta(f - f_0) + \frac{U_m^2 T}{2} \frac{\sin^2\left[2\pi(f - f_0)\frac{T}{2}\right]}{\left[2\pi(f - f_0)\frac{T}{2}\right]^2}.$$

Р.1.1.16. Чтобы сигнал ФМ имел такую же среднюю мощность, как и сигнал АМ (см. Р.1.1.15), необходимо, чтобы его амплитуда $A = \sqrt{2U_m}$.

При манипуляции на угол $\varphi=\pi$ сигнал ФМ эквивалентен сигналу БАМ:

$$s_{\text{ФМ}}(t)=\sqrt{2}\,U_m\,\overset{\circ}{X}(t)\cos(\omega_0 t+\varphi_0),\quad \overset{\circ}{X}(t)=\pm 1.$$

Энергетический спектр такого процесса определится сплошной частью спектра АМ сигнала (см. Р.1.1.15), если в нем заменить U_m на $\sqrt{2}\,U_m$. Следовательно,

$$\overset{*}{G}_{0\text{ФМ}}(t)=U_m^2\,T\,\frac{\sin^2\left[2\pi(f-f_0)\dfrac{T}{2}\right]}{\left[2\pi(f-f_0)\dfrac{T}{2}\right]^2}.$$

Р.1.1.17. Полагая, что фазы частот «нажатия» и «отжатия» меняются независимо, можно ЧМ сигнал при двоичной манипуляции рассматривать как сумму двух АМ колебаний на частотах $f_1=f_0+0{,}5\,\Delta f$, $f_2=f_0-0{,}5\,\Delta f$. Поэтому с учетом Р.1.1.15 можно написать для искомого энергетического спектра

$$G_{0\text{ЧТ}}(f)=\frac{U_m^2}{2}\,\delta(f-f_1)+\frac{U_m^2\,T}{2}\,\frac{\sin^2\left[2\pi(f-f_1)\dfrac{T}{2}\right]}{\left[2\pi(f-f_1)\dfrac{T}{2}\right]^2}+$$

$$+\frac{U_m^2}{2}\,\delta(f-f_2)+\frac{U_m^2\,T}{2}\,\frac{\sin^2\left[2\pi(f-f_2)\dfrac{T}{2}\right]}{\left[2\pi(f-f_2)\dfrac{T}{2}\right]^2}.$$

1.2. Огибающая, мгновенная фаза и частота узкополосного случайного процесса

Узкополосный случайный процесс $Z(t)$[1] или любую его реализацию можно представить в виде

$$z(t)=r(t)\cos\Psi(t). \qquad (1.18)$$

Здесь $\Psi(t)=\omega_0 t+\varphi(t)$ — мгновенная фаза; $\omega_0=2\pi f_0$ — частота в полосе усредненного, определенного на положительных частотах энергетического спектра процесса; $r(t)$ и $\varphi(t)$ — огибающая и мгновенная начальная фаза, которые являются медленно меняющимися по сравнению с $\cos\omega_0 t$ функциями.

Процесс (1.18) можно представить в виде

$$z(t)=x(t)\cos\omega_0 t+y(t)\sin\omega_0 t, \qquad (1.19)$$

---

[1] Процесс называется узкополосным, если для него выполняется условие $\omega_0\gg 2\pi F_э$.

где $x(t)$ и $y(t)$ — квадратурные компоненты, определяемые соотношениями:

$$x(t) = r(t) \cos \varphi(t); \quad y(t) = r(t) \sin \varphi(t). \tag{1.20}$$

Огибающую $r(t)$ и фазу $\varphi(t)$ можно определить по квадратурным компонентам:

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}; \quad \varphi(t) = \operatorname{arc\,tg} \frac{y(t)}{x(t)}. \tag{1.21}$$

Квадратурные компоненты процесса $z(t)$ можно представить как вещественную и мнимую составляющие комплексной функции

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\, e^{i\varphi(t)} = r(t) \cos \varphi(t) + i\, r(t) \sin \varphi(t) = x(t) + i\, y(t). \tag{1.22}$$

Функция $\mathbf{r}(t)$ называется комплексной огибающей процесса $z(t)$. Комплексный процесс $\mathbf{z}(t)$ можно представить следующим образом:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{r}(t)\, e^{i\omega_0 t} = r(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] + i\, r(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)] = \\ = z(t) + i\, \hat{z}(t). \tag{1.23}$$

Здесь $\hat{z}(t)$ — процесс, сопряженный процессу $z(t)$.

Мгновенная частота процесса $z(t)$ определяется соотношением

$$\omega(t) = \frac{d\Psi}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi}{dt}. \tag{1.24}$$

Используя пару преобразований Гильберта

$$\hat{z}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z(\tau)}{t - \tau}\, d\tau, \quad z(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{z}(t)}{\tau - t}\, d\tau, \tag{1.25}$$

огибающую и мгновенную фазу сигнала можно определить так:

$$r(t) = \sqrt{z^2(t) + \hat{z}^2(t)}; \quad \Psi(t) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\hat{z}(t)}{z(t)}. \tag{1.26}$$

При определении огибающей и фазы по Гильберту нет необходимости задавать частоту процесса ω_0. Спектр по Фурье сопряженного сигнала $S_{\hat{}}(f)$ связан со спектром $S_z(f)$ соотношением

$$S_{\hat{z}}(f) = \begin{cases} i\, S_z(f) & \text{при } f < 0, \\ -i\, S_z(f) & \text{при } f > 0. \end{cases} \tag{1.27}$$

Отсюда следует, что спектр комплексного сигнала $z(t)$ существует только на положительных частотах, причем

$$\mathbf{z}(t) = 2 \int_{0}^{\infty} S(f)\, e^{i2\pi f t}\, df. \tag{1.28}$$

Если узкополосный случайный процесс

$$Z(t) = X(t) \cos \omega_0 t + Y(t) \sin \omega_0 t = R(t) \cos[\omega_0 t + \Phi(t)]$$

является нормальным, а его квадратурные компоненты $X(t)$ и $Y(t)$ независимы, то совместная плотность вероятности квадратурных компонент

$$w_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x(t)\,\sigma_y(t)} \exp\left\{-\frac{[x - m_x(t)]^2}{2\sigma_x^2(t)} - \frac{[y - m_y(t)]^2}{2\sigma_y^2(t)}\right\}. \qquad (1.29)$$

Здесь $m_x(t)$, $m_y(t)$ — математические ожидания квадратурных компонент; $\sigma^2{}_x(t)$, $\sigma^2{}_y(t)$ — дисперсии квадратурных компонент.

Поскольку

$$X(t) = R(t)\cos\Phi(t), \quad Y(t) = R(t)\sin\Phi(t),$$

можно перейти от декартовых координат x и y к полярным координатам r и φ и определить совместную плотность вероятности огибающей и фазы узкополосного случайного процесса

$$w_1(r, \varphi) = \frac{r}{2\pi\sigma_x(t)\,\sigma_y(t)} \exp\left\{-\frac{[r\cos\varphi - m_x(t)]^2}{2\sigma_x^2(t)} - \right.$$

$$\left. - \frac{[r\cos\varphi - m_y(t)]^2}{2\sigma_y^2(t)}\right\}. \qquad (1.30)$$

Отсюда легко найти одномерные плотности вероятности огибающей $w_1(r)$ и фазы $w_1(\varphi)$.

Конкретный вид одномерных плотностей вероятности $w_1(r)$ и $w_1(\varphi)$ зависит от соотношения между параметрами квадратурных компонент случайного процесса.

Задачи

1.2.1. Найти огибающую, мгновенную фазу и мгновенную частоту для сигнала БАМ

$$z(t) = \frac{mU_m}{2}\cos(\omega_0 + \Omega)\,t + \frac{mU_m}{2}\cos(\omega_0 - \Omega)\,t.$$

Составить выражение для комплексного сигнала.

1.2.2. Найти огибающую, мгновенную фазу и мгновенную частоту и составить выражение для комплексного сигнала, если процесс $z(t)$ описывается выражением

$$z(t) = U_m\cos\omega_0 - \beta\frac{U_m}{2}\cos(\omega_0 + \Omega)\,t + \beta\frac{U_m}{2}\cos(\omega_0 - \Omega)\,t.$$

1.2.3. Дан сигнал $z(t) = \sum\limits_{l=1}^{L} U_l \cos(\omega_0 + \Omega_l)\,t$. Найти сопряженный сигнал $\hat{z}(t)$, а также огибающую, мгновенную фазу и частоту.

1.2.4. Найти квадратные компоненты амплитудно-модулированного колебания

$$z(t) = U_m(1 + m\cos\Omega t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

1.2.5. Дан сигнал $s(t)=U_1\cos\omega_1 t+U_2\cos\omega_2 t$. Найти огибающую и фазу сигнала для случаев $\omega_0=\omega_1$ и $\omega_0=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$. Показать, что во втором случае огибающая совпадает с огибающей по Гильберту.

1.2.6. Найти огибающую и мгновенную фазу колебания ОБП при модуляции гармоническим колебанием $\sin\Omega t$.

1.2.7. Показать, что сигналы, сопряженные по Гильберту с сигналами $z_1(t)=U_m\cos\omega_0 t$, $z_2(t)=U_m\sin\omega_0 t\times\times(-\frac{T}{2}\leqslant t\leqslant\frac{T}{2})$, равны: $\hat{z}_1(t)=U_m\sin\omega_0 t$, $\hat{z}_2(t)=-U_m\cos\omega_0 t$ лишь при $T\to\infty$. Показать, что этот же результат следует из спектральных соотношений $\mathbf{S}_{\hat{z}}(f)=-i\mathbf{S}_z(f)$ (при $f>0$).

1.2.8. Найти огибающую и мгновенную фазу по Гильберту для процесса $z(t)$, имеющего спектральную плотность

$$\mathbf{S}_z(f)=\begin{cases}1 \text{ при } f_1<f<f_2,\\ 0 \text{ при } f<f_1,\ f>f_2.\end{cases}$$

1.2.9. Показать, что при симметрии квадратурных компонент ($\sigma^2{}_x=\sigma^2{}_y=\sigma^2$) одномерная плотность вероятности огибающей узкополосного нормального случайного процесса

$$w_1(r)=\frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2+\alpha_{\text{р}}^2}{2\sigma^2}\right)I_0\left(\frac{\alpha_{\text{р}}r}{\sigma^2}\right);\ \alpha_{\text{р}}=\sqrt{m_x^2+m_y^2},\quad r\geqslant 0$$

(обобщенно-релеевское распределение).

1.2.10. Показать, что при $\sigma^2{}_x=\sigma^2{}_y=\sigma^2$ и $m_x=m_y=0$ одномерная плотность вероятности огибающей узкополосного нормального случайного процесса

$$w_1(r)=\frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right),\ r\geqslant 0$$

(распределение Рэлея).

1.2.11. Показать, что при $\sigma^2{}_x=0$ и $m_x=m_y=0$ одномерная плотность вероятности огибающей узкополосного нормального случайного процесса описывается функцией

$$w_1(r)=\frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_x^2}\right),\ r\geqslant 0.$$

(односторонне-нормальное распределение).

1.2.12. Найти одномерную плотность вероятности фазы узкополосного нормального случайного процесса при условиях:

$$1)\quad \sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma^2,\ m_x,\ m_y\neq 0;$$

$$2)\quad \sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma^2,\ m_x=m_y=0.$$

1.2.13. Система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) эффективно следит за фазой входного процесса, если она не превышает величины π/n (n — целое число). Какова вероятность срыва слежения, если на вход системы ФАПЧ поступает узкополосный нормальный шум, а $n=2$.

1.2.14. Показать, что при $\alpha_р/\sigma\gg 1$ обобщенное распределение Рэлея можно приближенно представить в виде

$$w_1(r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{r^2+\alpha_р^2}{2\sigma^2}\right)\sqrt{\frac{r}{\alpha_р}}\left(1+\frac{\sigma^2}{8\alpha_р r}\right).$$

1.2.15. Показать, что при $\alpha_р/\sigma\gg 3$ в области малых $\varphi-\varphi_0$ распределение фазы узкополосного нормального случайного процесса является нормальным.

1.2.16. Показать, что огибающая суммы гармонического колебания с амплитудой U_m и узкополосного стационарного нормального процесса с дисперсией σ^2 имеет обобщенно-рэлеевское распределение. Построить графики $w_1(r)$ для $U_m/\sigma=0,\ 1;\ 2;\ 3$.

1.2.17. Найти среднее значение и дисперсию напряжения $u_{нч}$ на выходе идеального ФНЧ, подключенного к линейному детектору с характеристикой преобразования

$$u_{вых}=\begin{cases} ku_{вх} & \text{при } u_{вх}>0,\\ 0 & \text{при } u_{вх}<0,\end{cases}$$

если на вход детектора подается сумма гармонического сигнала с амплитудой U_m и узкополосного стационарного нормального шума с дисперсией σ^2.

Решения и ответы

Р.1.2.1. Приведем заданный сигнал $z(t)$ к виду (1.19)

$$z(t)=\frac{mU_m}{2}(\cos\omega_0 t\cos\Omega t-\sin\omega_0 t\sin\Omega t+\cos\omega_0 t\cos\Omega t+$$
$$+\sin\omega_0 t\sin\Omega t)=mU_m\cos\Omega t\cos\omega_0 t.$$

В этом случае квадратурная компонента

$$x(t) = mU_m \cos \Omega t,,$$

а квадратурная компонента $y(t) = 0$.

В соответствии с ф-лой (1.21) имеем для огибающей

$$r(t) = |\, x(t) \,| = mU_m \,|\cos \Omega t\,|$$

и для мгновенной начальной фазы

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} 0 = 0.$$

Мгновенная фаза процесса $z(t)$

$$\psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t) = \omega_0 t.$$

Мгновенная частота

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} \psi(t) = \omega_0.$$

Согласно ф-ле (1.22) для комплексной огибающей получим

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\, e^{i\varphi(t)} = r(t) = mU_m \,|\cos \Omega t\,|.$$

Подставляя это выражение в (1.23), получаем для комплексного сигнала

$$\mathbf{z}(t) = mU_m \,|\cos \Omega t\,| \cos \omega_0 t + i\, mU_m \,|\cos \Omega t\,| \sin \omega_0 t.$$

Р.1.2.2 Осуществив простые преобразования, приведем процесс $z(t)$ к следующему виду:

$$z(t) = U_m \cos \omega_0 t - \frac{\beta U_m}{2} \cos \Omega t \cos \omega_0 t + \frac{\beta U_m}{2} \sin \Omega t \sin \omega_0 t +$$

$$+ \frac{\beta U_m}{2} \cos \Omega t \cos \omega_0 t + \frac{\beta U_m}{2} \sin \Omega t \sin \omega_0 t = U_m \cos \omega_0 t +$$

$$+ \beta U_m \sin \Omega t \sin \omega_0 t.$$

В соответствии с (1.19) имеем для квадратурных компонент

$$x(t) = U_m; \; y(t) = \beta U_m \sin \Omega t.$$

По ф-лам (1.21) находим огибающую

$$r(t) = \sqrt{U_m^2 + \beta^2 U_m^2 \sin^2 \Omega t} = U_m \sqrt{1 + \beta^2 \sin^2 \Omega t}$$

и мгновенную начальную фазу $\varphi(t) = \operatorname{arctg}(\beta \sin \Omega t)$. Мгновенная фаза

$$\Psi(t) = \omega_0 t + \operatorname{arctg}(\beta \sin \Omega t).$$

Мгновенная частота

$$\omega(t) = \frac{d}{dt}\Psi(t) = \omega_0 + \frac{\beta\Omega\cos\Omega t}{1+\beta^2\sin^2\Omega t}.$$

В соответствии с (1.23) комплексный сигнал

$$z(t) = U_m\sqrt{1+\beta^2\sin^2\Omega t}\cos[\omega_0 t + \operatorname{arctg}(\beta\sin\Omega t)] + $$
$$+ \mathrm{i}\,U_m\sqrt{1+\beta^2\sin^2\Omega t}\sin[\omega_0 t + \operatorname{arctg}(\beta\sin\Omega t)].$$

Р.1.2.3. Относительно частоты ω_0 сигнал

$$z(t) = \sum_{l=1}^{L} u_l\cos(\omega_0+\Omega_l)t = \cos\omega_0 t\sum_{l=1}^{L} u_l\cos\Omega_l t -$$
$$- \sin\omega_0 t\sum_{l=1}^{L} u_l\sin\Omega_l t.$$

Квадратурные компоненты сигнала $z(t)$ определяются соотношениями:

$$x(t) = \sum_{l=1}^{L} u_l\cos\Omega_l t;\quad y(t) = \sum_{l=1}^{L} u_l\sin\Omega_l t.$$

Для огибающей по ф-ле (1.21) получим выражение

$$r(t) = \sqrt{\left(\sum_{l=1}^{L} u_l\cos\Omega_l t\right)^2 + \left(\sum_{l=1}^{L} u_l\sin\Omega_l t\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\sum_{l=1}^{L} u_l^2 + \sum_{\substack{l=1\\ k\neq l}}^{L}\sum_{k=1}^{L} u_l u_k\cos(\Omega_l-\Omega_k)\,t}.$$

Мгновенная начальная фаза

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg}\frac{\sum_{l=1}^{L} u_l\sin\Omega_l t}{\sum_{l=1}^{L} u_l\cos\Omega_l t}.$$

Мгновенная частота

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{d}{dt}[\varphi(t)] = \omega_0 + \frac{\sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{L}\Omega_l u_l u_k\cos(\Omega_l+\Omega_k)\,t}{\sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{L} u_l u_k\cos(\Omega_l-\Omega_k)\,t}.$$

Сопряженный сигнал рассчитывается по ф-ле (1.23)

$$\hat{z}(t) = \sqrt{\sum_{l=1}^{L} u_l^2 + \sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{L} u_l u_k \cos(\Omega_l - \Omega_k)\, t} \times$$

$$\times \sin\left(\omega_0 t + \operatorname{arctg} \frac{\sum\limits_{l=1}^{L} u_l \sin \Omega_l t}{\sum\limits_{l=1}^{L} u_l \cos \Omega_l t}\right).$$

Р.1.2.4. Представим амплитудно-модулированное колебание в виде

$$z(t) = U_m (1 + m \cos \Omega t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_m (1 + m \cos \Omega t)] \times$$

$$\times \cos \varphi_0 \cos \omega_0 t - U_m (1 + m \cos \Omega t) \sin \varphi_0 \sin \omega_0 t.$$

Квадратурные компоненты

$$x(t) = U_m (1 + m \cos \Omega\ ) \cos \varphi_0; \ y(t) = U_m (1 + m \cos \Omega t) \sin \varphi_0.$$

Р.1.2.5. Если положить $\omega_0 = \omega_1$, то $s(t) = U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos(\omega_1 + \Omega) t$, где $\Omega = \omega_2 - \omega_1$.

В этом случае

$$s(t) = (U_1 + U_2 \cos \Omega t) \cos \omega_1 t - U_2 \sin \Omega t \sin \omega_1 t.$$

Огибающая

$$r(t) = \sqrt{(U_1 + U_2 \cos \Omega t)^2 + (U_2 \sin \Omega t)^2} =$$

$$= \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2 U_1 U_2 \cos \Omega t.}$$

Мгновенная фаза

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{U_2 \sin \Omega t}{U_1 + U_2 \cos \Omega t}.$$

В случае $\omega_0 = \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2)$

$$s(t) = (U_1 + U_2) \cos \Omega t \cos \omega_0 t + (U_1 - U_2) \sin \Omega t \sin \omega_0 t,$$

где $\Omega = \frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_1)$.

Огибающая

$$r(t) = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2 U_1 U_2 \cos 2\Omega t.}$$

Мгновенная фаза $\Psi(t) = \omega_0 t + \operatorname{arctg}\left(\frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2} \operatorname{tg} \Omega t\right)$.

Сигнал, сопряженный по Гильберту,

$$\hat{s}(t) = U_1 \sin \omega_1 t + U_2 \sin \omega_2 t.$$

Огибающая по Гильберту

$$r(t) = \sqrt{s^2(t) + \hat{s}^2(t)} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos 2\Omega t},$$

что совпадает с выражением для огибающей, полученной в предположении $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$.

Р.1.2.6. Колебание ОБП при модуляции гармоническим процессом $\sin \Omega t$

$$s_{\text{ОБП}}(t) = U_m \cos(\omega_0 + \Omega) t = U_m \cos \Omega t \cos \omega_0 t -$$

$$- U_m \sin \Omega t \sin \omega_0 t.$$

Поскольку в данном случае $x(t) = U_m \cos \Omega t$; $y(t) = U_m \sin \Omega t$, для огибающей и мгновенной фазы получим:

$$r(t) = \sqrt{U_m^2 \cos^2 \Omega t + U_m^2 \sin^2 \Omega t} = U_m;$$

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{\sin \Omega t}{\cos \Omega t} = \Omega t.$$

Полученный результат свидетельствует о том, что при модуляции гармоническим колебанием процесс ОБП также является гармоническим.

Р.1.2.7. Согласно (1.25)

$$\hat{z}_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\cos \omega_0 \tau}{t - \tau} d\tau.$$

Введя переменную $t - \tau = x$, получим

$$\hat{z}_1(t) = \frac{U_m}{\pi} \cos \omega_0 t \int_{t-T/2}^{t+T/2} \frac{\cos \omega_0 x}{x} dx + \frac{U_m}{\pi} \sin \omega_0 t \int_{t-T/2}^{t+T/2} \frac{\sin \omega_0 x}{x} dx.$$

При $T \to \infty$ первый интеграл от нечетной функции в бесконечных пределах обращается в нуль, а второй равен π [6]. Следовательно, $\hat{z}_1(t) = U_m \sin \omega_0 t$ при $T \to \infty$. Аналогично можно показать, что при $T \to \infty$ $\hat{z}_2(t) = - U_m \cos \omega_0 t$. Соотношение $\mathbf{S}_{\hat{z}}(f) = -\mathrm{i}\mathbf{S}_z(f)$ при $f > 0$ [см. ф-лу (1.27)] означает что любую спектральную составляющую сопряженного сигнала на положительной частоте можно получить из соответствующей компоненты самого сигнала путем фазового сдвига на —π/2. Следовательно, при $T\to\infty$

$$\hat{z}_1(t) = U_m\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = U_m\sin\omega_0 t;$$

$$\hat{z}_2(t) = U_m\sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = -U_m\cos\omega_0 t.$$

Р.1.2.8 Заданному спектру соответствует согласно (1.28) комплексный сигнал

$$\mathbf{z}(t) = 2\int\limits_{F_1}^{F_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,df = \frac{\sin\omega_2 t - \sin\omega_1 t}{\pi t} - \mathrm{i}\,\frac{\cos\omega_2 t - \cos\omega_1 t}{\pi t}.$$

Согласно (1.23)

$$z(t) = \mathrm{Re}\,\mathbf{z}(t) = \frac{\sin\omega_2 t - \sin\omega_1 t}{\pi t};\ \hat{z}(t) = \mathrm{Jm}\,\mathbf{z}(t) = -$$

$$-\frac{\cos\omega_2 t - \cos\omega_1 t}{\pi t}.$$

Воспользовавшись (1.26), получим для огибающей и мгновенной фазы:

$$r(t) = \frac{1}{\pi|t|}\sqrt{(\sin\omega_2 t - \sin\omega_1 t)^2 + (\cos\omega_2 t - \cos\omega_1 t)^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi|t|}\sqrt{4\sin^2\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\,t} = \frac{2}{\pi}\left|\frac{\sin\frac{\Delta\omega}{2}\,t}{t}\right|;$$

$$\varphi(t) = \mathrm{arctg}\,\frac{-(\cos\omega_2 t - \cos\omega_1 t)}{\sin\omega_2 t - \sin\omega_1 t} = \frac{\omega_2+\omega_1}{2}\,t.$$

Р.1.2.9. При симметричных квадратурных компонентах, усредняя (1.30) по φ, находим

$$w_1(r) = \frac{r}{2\pi\sigma^2}\int\limits_0^{2\pi}\exp\left[-\frac{(r\cos\varphi - m_x)^2}{2\sigma^2} - \frac{(r\sin\varphi - m_y)^2}{2\sigma^2}\right]d\varphi,$$

$$r \geqslant 0.$$

Осуществив простые преобразования, получим

$$w_1(r) = \frac{r}{2\pi\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2+m_x^2+m_y^2}{2\sigma^2}}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\frac{r\sqrt{m_x^2+m_y^2}}{\sigma^2}\cos(\varphi-\varphi_0)}\times$$

$$\times\,d\varphi,\ r \geqslant 0,$$

где $\varphi_0 = \operatorname{arctg} \dfrac{m_y}{m_x}$,

Введем переменную $u = \varphi - \varphi_0$ и обозначим $\sqrt{m^2_x + m^2_y} = \alpha_{\text{р}}$. В этом случае можно записать [15]

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{\frac{r\alpha_{\text{р}}}{\sigma^2}\cos(\varphi-\varphi_0)}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\varphi_0}^{2\pi-\varphi_0} e^{\frac{r\alpha_{\text{р}}}{\sigma^2}\cos u}\,du = I_0\left(\frac{\alpha_{\text{р}} r}{\sigma^2}\right).$$

Здесь $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Таким образом,

$$w_1(r) = \frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2+\alpha_p^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\alpha_{\text{р}} r}{\sigma^2}\right),\quad r \geqslant 0.$$

Р.1.2.10. Распределение Рэлея $w_1(r) = \dfrac{r}{\sigma^2}\exp \times \left(-\dfrac{r^2}{2\sigma^2}\right)$ является частным случаем обобщенного распределения Рэлея при $m_x = m_y = \alpha_{\text{р}} = 0$, так как $I_0(0) = 1$.

Р.1.2.11. Условие $m_x = \sigma^2_x = 0$ означает, что процесс $Z(t)$ можно представить в виде $Z(t) = Y(t)\sin\omega_0 t$.

Но тогда его огибающая согласно (1.21) $R(t) = |Y(t)|$.

Поскольку $m_y = 0$, плотность вероятности квадратурной компоненты $Y(t)$ имеет вид

$$w_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}\right),\quad -\infty < y < \infty.$$

Эта функция относительно y четная, поэтому конкретному значению модуля $r = |y| \geqslant 0$ могут соответствовать значения $y = r_1$ и $y = -r_1$, имеющие одинаковые плотности вероятности. С учетом сказанного получаем искомое распределение для огибающей.

Р.1.2.12. Двумерная плотность вероятности огибающей и фазы узкополосного нормального случайного процесса при $\sigma^2_x = \sigma^2_y = \sigma^2$ и m_x, $m_y \neq 0$ определяется соотношением (1.30), откуда

$$w_1(\varphi) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int\limits_0^{\infty} r\exp\left[-\frac{(r\cos\varphi - m_x)^2 + (r\sin\varphi - m_y)^2}{2\sigma^2}\right]dr.$$

После простых преобразований получаем

$$w_1(\varphi) = \frac{\exp\left(-\frac{\alpha_p^2}{2\sigma^2}\right)}{2\pi\sigma^2} \int\limits_0^\infty r \exp\left[-\frac{r^2 - 2\alpha_p r\cos(\varphi - \varphi_p)}{2\sigma^2}\right] dr.$$

Здесь $\alpha_p = \sqrt{m^2{}_x + m^2{}_y}$ и $\varphi_p = \operatorname{arctg}\ \frac{m_y}{m_x}$.

Дополняя показатель экспоненты в подынтегральной функции до полного квадрата и вводя функцию Лапласа

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt,$$

находим

$$w_1(\varphi) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\alpha_p^2}{2\sigma^2}} + \frac{\alpha_p \cos(\varphi - \varphi_p)}{\sqrt{2\pi}\sigma} F\left[\frac{\alpha_p}{\sigma}\cos(\varphi - \varphi_p)\right] \times$$
$$\times e^{-\frac{\alpha_p^2 \sin^2(\varphi - \varphi_p)}{2\sigma^2}}, \ |\varphi - \varphi_p| \leqslant \pi.$$

При $m_x = m_y = 0$ следует равномерное распределение для фазы в интервале $(0,\ 2\pi)$: $w_1(\varphi) = 1/2\pi$.

Р.1.2.13. Как следует из Р.1.2.12, фаза стационарного нормального случайного процесса ($\alpha_p = 0$) имеет равномерное распределение $w_1(\varphi) = 1/2\pi$. Вероятность срыва слежения в системе ФАПЧ

$$p = 1 - \int\limits_0^{\pi/n} \frac{d\varphi}{2\pi} = 1 - \frac{1}{2n}.$$

При $n = 2$ $p = 0{,}75$.

Р.1.2.14. Воспользовавшись асимптотическим разложением функции Бесселя [27]

$$I_0(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left(1 + \frac{1}{8z} + \cdots\right),$$

необходимо ограничиться первыми двумя слагаемыми этого разложения.

Р.1.2.15. При $\varphi - \varphi_0 \leqslant \pi/60$ можно считать $\cos(\varphi - \varphi_0) \approx 1$, $\sin(\varphi - \varphi_0) \approx \varphi - \varphi_0$. Если, кроме того, $\alpha_p/\sigma > 3$, то $\exp(-\alpha^2{}_p/2\sigma^2) \approx 0$, а функция Лапласа $F[\ \frac{\alpha_p}{\sigma}\ \cos\times$

$\times(\varphi-\varphi_0)]\approx 1$. В этих условиях из Р.1.2.12 следует результат.

$$w_1(\varphi)=\frac{\alpha_\text{р}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\alpha_\text{р}^2(\varphi-\varphi_\text{р})^2}{2\sigma^2}\right),$$

т. е. закон распределения фазы является нормальным с математическим ожиданием $\varphi_\text{р}$ и дисперсией $(\sigma/\alpha_\text{р})^2$.

Р.1.2.16. Сумму гармонического колебания $U_m\cos\times\times(\omega_0t+\varphi_0)$ и узкополосного шума $U(t)=X(t)\cos\omega_0t+$ $+Y(t)\sin\omega_0t$ можно представить следующим образом:

$$Z(t)=[X(t)+U_m\cos\varphi_0]\cos\omega_0 t+[Y(t)-U_m\sin\varphi_0]\sin\omega_0 t.$$

Так как сумма нормального шума и детерминированного колебания также является нормальным процессом, распределение огибающей можно определить по формуле, полученной в Р.1.2.9, полагая

$$m_x=U_m\cos\varphi_0,\ m_y=U_m\sin\varphi_0,\ \alpha_\text{р}=U_m.$$

В этом случае

$$w_1(r)=\frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2+U_m^2}{2\sigma^2}\right)I_0\left(\frac{U_mr}{\sigma^2}\right),$$

т. е. огибающая распределена по обобщенному закону Рэлея. Графики $w_1(r)$ приведены на рис. 1.2.

Р.1.2.17. Выходное напряжение $u_\text{нч}$ связано с огибающей входного сигнала r соотношением $u_\text{нч}=kr$, где k — результирующий коэффициент передачи (детектора и фильтра). Соотношение для $w_1(r)$ было найдено в Р.1.2.16. Поскольку $u_\text{нч}$ и r связаны однозначно, то распределение для $u_\text{нч}\geqslant 0$

$$w_1(u_\text{нч})=\frac{w_1\left(\dfrac{u_\text{нч}}{k}\right)}{\dfrac{du_\text{нч}}{dr}}=\frac{u_\text{нч}}{k^2\sigma^2}\exp\left[-\frac{(kU_m)^2+u_\text{нч}^2}{2\sigma^2k^2}\right]\times$$

$$\times I_0\left(\frac{U_mu_\text{нч}}{k\sigma^2}\right).$$

Математическое ожидание выходного напряжения

$$M[u_\text{нч}]=\overline{u}_\text{нч}=\int\limits_0^\infty u_\text{нч}w_1(u_\text{нч})\,du_\text{нч}).$$

Интегрирование с использованием табличных интегралов [6] дает результат

$$M[u_{\text{нч}}] = k\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\left(1+\frac{U_m^2}{2\sigma^2}\right)I_0\left(\frac{U_m^2}{4\sigma^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{U_m^2}{2\sigma^2}I_1\left(\frac{U_m^2}{4\sigma^2}\right)\right]e^{-\frac{U_m^2}{4\sigma^2}},$$

где $I_1(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода первого порядка.

Дисперсия выходного напряжения

$$\sigma^2_{u_{\text{нч}}} = \int\limits_0^\infty (u_{\text{нч}} - \overline{u}_{\text{нч}})^2 w_1(u_{\text{нч}})\, du_{\text{нч}} =$$

$$= \int\limits_0^\infty u^2_{\text{нч}} w_1(u_{\text{нч}})\, du_{\text{нч}} - (\overline{u}_{\text{нч}})^2.$$

Интегрируя [6], получаем

$$\sigma^2_{u_{\text{нч}}} = 2k^2\sigma^2 + k^2U_m^2 - (\overline{u}_{\text{нч}})^2.$$

1.3. Основы теории дискретизации функций непрерывного аргумента. Теорема Котельникова

В технике связи очень часто возникает необходимость представления детерминированных и случайных функций непрерывного аргумента (например, времени или частоты) совокупностью их значений в дискретных точках (сечениях). Такое представление называют дискретизацией функций по аргументу.

Очень часто дискретизацию осуществляют на основе теоремы В. А. Котельникова, согласно которой функция $s(t)$, спектральная плотность которой отлична от нуля только в полосе частот $(-F, F)$, полностью определяется своими значениями, отсчитанными в дискретных точках через интервал

$$\Delta t = 1/2F. \tag{1.31}$$

Значения функции $s(t)$ в любой точке t выражаются формулой

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t)\frac{\sin 2\pi F(t-k\Delta t)}{2\pi F(t-k\Delta t)}, \tag{1.32}$$

где $s(k\Delta t)$ — отсчеты непрерывной функции $s(t)$ в дискретные моменты времени $t=k\Delta t$.

Строго говоря, функция с ограниченным спектром не ограничена во времени (нефинитна) и, наоборот, финитная функция времени имеет неограниченный спектр. Практический способ ограничения функций по спектру сводится к пропусканию сигнала через фильтр нижних частот (или полосовой фильтр). Средний квадрат относительной погрешности такого усечения спектра

$$\delta_у = \frac{\widetilde{[s(t) - s_\sim(t)]^2}}{\widetilde{s^2(t)}} = \frac{\int\limits_F^\infty S^2(f)\,df}{\int\limits_0^\infty S^2(f)\,df} \qquad (1.33)$$

в случае детерминированной функции $s(t)$ и

$$\delta_y = \frac{\int\limits_F^\infty G(f)\,df}{\int\limits_0^\infty G(f)\,df} \qquad (1.34)$$

для случайного процесса.

Полагая, что одновременно ограничен спектр сигнала полосой F и его длительность интервалом T, можно воспользоваться усеченным рядом Котельникова для приближенного представления сигнала.

$$s_\sim(t) = \sum_{k=1}^{B} s(k\Delta t)\,\frac{\sin 2\pi F(t - k\Delta t)}{2\pi F(t - k\Delta t)}. \qquad (1.35)$$

В выражении (1.35) $B = T/\Delta t + 1 = 2FT + 1$ — число отсчетов, приближенно описывающих финитный сигнал $s(t)$. При $2FT \gg 1$ можно считать, что

$$B = 2FT. \qquad (1.36)$$

Число $B = 2FT$ называют базой сигнала.

Ряды (1.32) и (1.35) могут быть использованы и для представления случайных процессов. В этом случае коэффициенты указанных рядов являются случайными величинами.

Если допустить, что воспроизведение процесса $X(t)$ на приеме осуществляется формированием ступенчатой функции $Y(t)$ (рис. 1.3) с шагом Δ_T

$$Y(t) = X(t_i - \Delta_T), \quad t_i < t < t_{i+1}, \qquad (1.37)$$

то, полагая, что речь идет о стационарном случайном процессе, интервал определения которого значительно превосходит шаг воспроизведения Δ_T, можно найти средний квадрат ошибки воспроизведения:

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{[Y(t) - X(t_i)]^2} = \overline{[X(t_i - \Delta_T) - X(t_i)]^2} \qquad (1.38)$$

Осуществляя простые вычисления, получаем относительную погрешность воспроизведения

$$\delta_в = \frac{\overline{\varepsilon^2}}{B_x(0)} = 2\,[1 - R_x(\Delta_T)], \qquad (1.39)$$

где $R_x(\Delta_T)$ — значение коэффициента корреляции процесса при аргументе Δ_T.

Из (1.39) можно получить выражение для допустимой величины шага воспроизведения Δ_T, исходя из заданной погрешности воспроизведения $\delta_в$:

$$\Delta_T = R_x^{-1}\,[1-0{,}5\delta_в], \tag{1.40}$$

где R_x^{-1} — функция, обратная коэффициенту корреляции процесса $X(t)$.

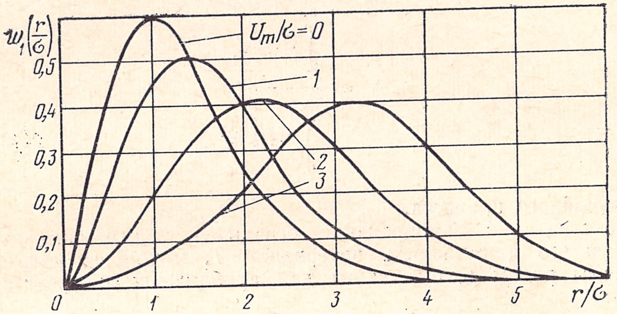


Рис. 1.2. Обобщенно-рэлеевское распределение огибающей узкополосного нормального случайного процесса

Задачи

1.3.1. Определить относительную погрешность $\delta_у$ при представлении сигнала $s(t)=a\exp(-\beta^2t^2)$ (колокольный импульс) рядом Котельникова, полагая, что сигнал снимается с выхода идеального фильтра нижних частот с полосой F. Найти интервал дискретизации Δt, полагая, что $\beta=20$ с$^{-1}$ и $\delta_у=10\%$.

1.3.2. Найти относительную погрешность представления случайного синхронного двоичного сигнала рядом Котельникова при произвольной граничной частоте. Определить величину $\delta_у$, если граничная частота выбрана равной $F_э$ и $2F_э$ ($F_э$ — ширина энергетического спектра, найденная по методу эквивалентного прямоугольника (см. задачу 1.1.1).

1.3.3 Найти базу сигнала, представляющего собой комбинацию из 15 элементарных прямоугольных двоичных импульсов длительностью $\tau_и=20$ мс.

1.3.4. Случайный процесс с корреляционной функцией $B(\tau)=B(0)\exp(-\alpha|\tau|)$ дискретизирован с шагом Δt. Найти погрешность представления такого процесса

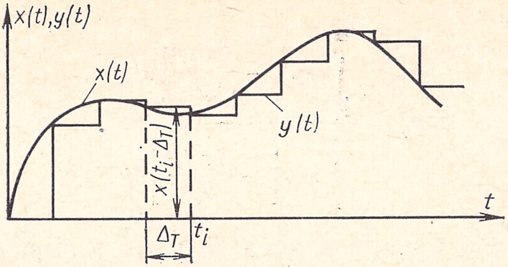


Рис. 1.3. К пояснению восстановления непрерывного процесса $X(t)$ путем формирования ступенчатой функции

рядом Котельникова в зависимости от параметров α и Δt.

1.3.5. Коэффициент корреляции стационарного случайного процесса, подлежащего дискретизации,

$$R_x(\tau) = \exp(-0{,}1\ |\ \tau\ |\ ).$$

Найти шаг воспроизведения Δ_T, при котором относительная погрешность воспроизведения $\delta_в$ равна 1%.

Сравнить полученную величину Δ_T с интервалом дискретизации по Котельникову Δt (см. задачу 1.3.4), обеспечивающим такую же погрешность $\delta_у$.

1.3.6. Для случайного процесса, имеющего коэффициент корреляции $R_x(\tau) = \exp(-\beta^2\tau^2)$, найти шаг равномерной дискретизации Δ_T, при котором обеспечивается заданная относительная погрешность воспроизведения $\delta_в$.

Решения и ответы

Р.1.3.1. Найдем сначала спектральную плотность колокольного импульса

$$\mathbf{S}(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} a\,\mathrm{e}^{-\beta^2 t^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,dt = a\frac{\sqrt{\pi}}{\beta}\,\mathrm{e}^{-\frac{(2\pi f)^2}{2\beta^2}}.$$

Поскольку полоса пропускания фильтра имеет величину F, определим по ф-ле (1.33) относительную погрешность представления колокольного импульса рядом

Котельникова

$$\sigma_{\text{у}} = \frac{\int\limits_F^{\infty} \exp\left[-\frac{(2\pi f)^2}{2\beta^2}\right] df}{\int\limits_0^{\infty} \exp\left[-\frac{(2\pi f)^2}{2\beta^2}\right] df}.$$

Умножая числитель и знаменатель этого выражения на $1/\sqrt{2\pi}\beta$ и принимая во внимание, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta} \int\limits_0^{\infty} \exp\left[-\frac{(2\pi f)^2}{2\beta^2}\right] df = \frac{1}{4\pi},$$

находим

$$\delta_{\text{у}} = 2\pi\left[1 - \Phi\left(\frac{2\pi F}{\beta}\right)\right],$$

где $\Phi(z)$ — функция Крампа.

Если $\delta_{\text{у}} = 10\%$, то из уравнения $\frac{0,1}{2\pi} = 1 - \Phi\left(\frac{2\pi F}{\beta}\right)$ определяем по таблицам аргумент функции Крампа $2\pi F/\beta = 2,4$. При $\beta = 20$ $F = 24/\pi$ Гц. Интервал дискретизации в соответствии с (1.31) $\Delta t = \pi/48 = 6,56 \cdot 10^{-2}$ с.

Р.1.3.2. С учетом Р.1.1.1 по ф-ле (1.33) находим

$$\delta_{\text{у}} = \frac{\int\limits_F^{\infty} \frac{\sin^2(\pi T f)}{(\pi T f)^2} df}{\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2(\pi T f)}{(\pi T f)^2} df} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin^2(\pi F T)}{\pi F T} + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(2\pi F T)\right],$$

где $\operatorname{Si}(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin y}{y} dy$ — интегральный синус [27]. При $F = F_э$, учитывая, что $F_э T = 0,5$ (см. Р.1.1.1), получаем

$$\delta_{\text{у}} = \frac{2/\pi + \pi/2 - \operatorname{Si}(\pi)}{\pi/2} = 0,23.$$

Если $F = 2F_э$, то $\delta_{\text{у}} = \frac{\pi/2 - \operatorname{Si}(2\pi)}{\pi/2} = 0,096.$

Р.1.3.3. Длительность сигнала $T=n\tau_и=15\,\tau_и=300$ мс. Полоса частот сигнала будет определяться полосой одного элемента. Ограничивая полосу шириной одного лепестка спектральной функции, получаем $F=1/\tau_и=50$ Гц. По ф-ле (1.36) $B=2$, $FT=30$.

Р.1.3.4. Энергетический спектр этого случайного процесса

$$G(f)=2B(0)\frac{\alpha}{\alpha^2+(2\pi f)^2}.$$

При ограничении полосы такого спектра частотой F определим погрешность усечения согласно (1.34)

$$\delta_у=1-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2\pi F}{\alpha}.$$

Подставив сюда согласно (1.31) $F=1/2\Delta t$, найдем

$$\delta_у=1-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\Delta t\,\alpha}.$$

Р.1.3.5. В соответствии с (1.40) при заданном коэффициенте корреляции

$$\Delta_T=10\ln\frac{1}{1-0{,}5\delta_в}.$$

Если $\delta_в=0{,}01$, то $\Delta_T=0{,}05$ с.

При дискретизации по Котельникову, используя Р.1.3.4, получаем

$$\Delta t=\frac{\pi}{0{,}1\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\delta_у\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Для заданной величины $\delta_у=0{,}01$ $\Delta t=0{,}523$ с.

Р.1.3.6. В соответствии с (1.39) можно написать уравнение

$$\exp\left(-\beta^2\Delta_T^2\right)=1-0{,}5\delta_в.$$

Откуда

$$\Delta_T=\frac{1}{\beta}\sqrt{\ln\frac{1}{1-0{,}5\delta_в}}.$$

1.4. Пространства сообщений и сигналов

Во многих вопросах, связанных с приемом и преобразованием сигналов, весьма полезными оказываются геометрические представления различных функций (в дальнейшем будут рассматриваться только функции времени) в виде векторов некоторого пространства.

Любую совокупность n вещественных чисел $\{x_1, \ldots, x_n\}$ можно рассматривать как координаты точки в некотором n-мерном пространстве или координаты вектора $\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ в этом пространстве.

Сумма двух векторов $\vec{x}=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $\vec{\{y_1}, y_2, \ldots, y_n\}$ дает вектор $\vec{z}=\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, координаты которого равны сумме одноименных координат векторов-слагаемых:

$$z_i = x_i + y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.41}$$

Если элементы x_i, y_i, z_i принадлежат одному и тому же пространству, то это пространство относится к классу линейных.

Длина вектора в n-мерном пространстве (норма вектора) определяется соотношением

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{1.42}$$

Расстояние между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ определяется как норма их разности

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}. \tag{1.43}$$

Скалярное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ есть число

$$(\vec{x}\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{1.44}$$

Если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то такие векторы называются ортогональными, а n-мерное пространство, в котором справедливы соотношения (1.41)—(1.44), называется эвклидовым пространством и обозначается R_2.

Изложенные геометрические понятия используются в технике связи для наглядного представления сигналов и помех, которые характеризуются дискретной совокупностью координат. Такими координатами, в частности, могут быть котельниковские отсчеты или коэффициенты ряда Фурье.

Если функции (сигналы и помехи) задаются на непрерывном интервале $(0, T)$, то для их геометрического представления часто используют пространство, которое называется гильбертовым и обозначается L_2.

В пространстве L_2 операции сложения и умножения задаются обычным образом, а скалярное произведение определяется соотношением

$$\left(x(t)\, y(t)\right) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, y(t)\, dt. \tag{1.45}$$

Норма вектора в пространстве L_2 задается следующим образом:

$$\| x(t) \| = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t)\,dt}, \tag{1.46}$$

а расстояние между векторами

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \| x(t) - y(t) \| = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - y(t)]^2 dt}. \tag{1.47}$$

Любую функцию дискретного или непрерывного аргумента можно представить совокупностью функций известного вида, что эквивалентно представлению вектора его компонентами по отдельным координатным осям.

Чаще всего совокупность функций $\{f_k(t)\}$, по которым представляется данная функция $x(t)$, является ортогональной, т. е.

$$\frac{1}{T} \int_0^T f_k(t)\, f_l(t)\, dt = 0, \quad k \neq l. \tag{1.48}$$

Ортогональная система функций $\{f_k(t)\}$ называется полной в гильбертовом или эвклидовом пространстве, если всякая входящая в нее функция $f_k(t)$ неортогональна со всеми функциями $f(t)$, не содержащимися в данной системе.

В гильбертовом или эвклидовом пространстве всякая функция может быть единственным образом представлена на интервале $(0, T)$ в виде ряда по функциям полной ортонормированной системы, которая в этом случае называется базисом разложения:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t). \tag{1.49}$$

Функции $\varphi_k(t)$ при таком представлении представляют собой единичные орты, а коэффициенты $a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \varphi_k(t) dt$ — проекции функции $x(t)$ на соответствующие координатные оси. Биортогональной системой сигналов (функций) $\{s_k(t)\}$ является ансамбль сигналов, все элементы которого делятся на две группы: $\{s_i(t)\}$ и $\{-s_i(t)\}$, т. е. каждому сигналу в первой группе соответствует противоположный сигнал во второй группе.

Если в системе $\{s_i(t)\}$ число сигналов $B = 2FT$, то в биортогональной системе число сигналов $n = 2B$.

Системой сигналов, ортогональной в усиленном смысле, называется ансамбль $\{s_k(t)\}$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{T}\int_0^T s_k(t)\, s_l(t)\, dt = 0 \text{ при } k \neq l; \\ &\frac{1}{T}\int_0^T s_k(t)\, \hat{s}_l(t)\, dt = 0 \text{ при любых } k \text{ и } l. \end{aligned}\right\} \qquad (1.50)$$

Здесь $\hat{s}(t)$ — сопряженный сигнал. При заданной базе $B=2FT$ число сигналов в системе, орготональной в усиленном смысле, $n=B/2$.

Геометрическими представлениями можно пользоваться и в том случае, когда сигналы дискретны по уровням. Такие сигналы можно описать n-мерным вектором $\vec{x}=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, особенностью кото-

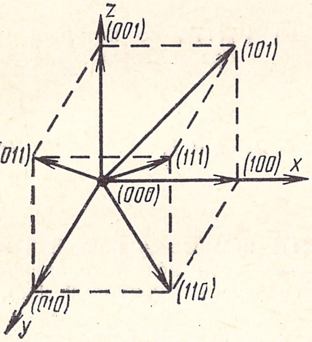


Рис. 1.4. Представление трехразрядных двоичных сигналов в трехмерном пространстве

рого является то, что все его координаты могут принимать лишь дискретные значения, которые обозначают 0, 1, 2, ..., $m-1$ (m — число дискретных состояний элемента сигнала). На рис. 1.4 в трехмерном пространстве показаны восемь векторов, соответствующих трехразрядным двоичным комбинациям 000, 001, ..., 110, 111.

Операция сложения элементов дискретного пространства вводится таким образом, чтобы в итоге получились элементы, допустимые в данном пространстве. Для этого вводится операция сложения по модулю m (mod_m). Например, при $m=2$ правила суммирования таковы:

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{mod}_2(1 \pm 1) = 0; \quad \mathrm{mod}_2(1 \pm 0) = 1; \\ &\mathrm{mod}_2(0 \pm 1) = 1; \quad \mathrm{mod}_2(0 \pm 0) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.51)$$

Расстояние между двоичными сигналами в n-мерных пространствах определяется чаще всего по Хэммингу

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{mod}_2(x_i \pm y_i), \qquad (1.52)$$

т. е. его можно найти как результат сложения сумм по модулю 2 одноименных разрядов.

Геометрические представления справедливы и для случайных процессов с той разницей, что их координаты в соответствующих пространствах следует считать случайными числами, а сходимость сумм и интегралов понимается в среднем.

Задачи

1.4.1. Финитный сигнал длительности T со спектром, ограниченным полосой F, представляется усеченным рядом Фурье

$$s(t)=\sum_{k=1}^{L}\left(\sqrt{2}\,a_k\cos k\frac{2\pi}{T}t+\sqrt{2}\,b_k\sin k\frac{2\pi}{T}t\right),$$

причем $L=FT$. Найти норму вектора, представляющего сигнал $s(t)$ в $2L$-мерном пространстве Эвклида. Дать физическое толкование нормы этого вектора.

1.4.2. Два ортогональных сигнала — $s_1(t)$ и $s_2(t)$, имеющих одинаковые полосы частот F и длительности T, дискретизированы по Котельникову. Написать выражение для координат суммарного сигнала в пространстве Эвклида. Найти норму суммарного сигнала и выразить ее через нормы исходных сигналов в общем случае и в случае равных норм исходных сигналов. Определить расстояние между сигналами.

1.4.3. Два сигнала, заданных на интервале T, описываются выражениями:

$$s_1(t)=\sqrt{2}\,a_1\cos\frac{2\pi}{T}t+\sqrt{2}\,b_1\sin\frac{2\pi}{T}t+\sqrt{2}\,a_3\cos 3\frac{2\pi}{T}t;$$

$$s_2(t)=\sqrt{2}\,a_1\cos\frac{2\pi}{T}t+\sqrt{2}\,b_2\sin 2\frac{2\pi}{T}t+\sqrt{2}\,b_3\sin 3\frac{2\pi}{T}t.$$

Определить координаты этих сигналов в пятимерном пространстве Эвклида и показать, что их скалярное произведение равно a^2_1. Найти расстояние между сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

1.4.4. В некоторой системе связи для передачи информации используются сигналы $s_1(t)=a\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t+\varphi_1\right)$ и $s_2(t)=a\cos\left(l\frac{2\pi}{T}t+\varphi_1+\frac{\pi}{2}\right)$ ($k\neq l$ — целые числа), имеющие длительность T. Показать, что данная система сигналов является ортогональной в усиленном смысле. Найти расстояние между сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t)$ в пространстве Гильберта.

1.4.5. Сигнал $s(t)$, имеющий длительность T, задан рядом Фурье

$$s(t) = a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t + a_2 \cos 2 \frac{2\pi}{T} t + a_3 \cos 3 \frac{2\pi}{T} t + $$
$$+ b_1 \sin \frac{2\pi}{T} t + b_2 \sin 2 \frac{2\pi}{T} t + b_3 \sin 3 \frac{2\pi}{T} t.$$

Найти координаты этого сигнала и показать, что норма сигнала $s(t)$, вычисленная по этим координатам, равна норме в пространстве Гильберта.

1.4.6. Показать, что в системы связи с широкополосными сигналами, имеющими длительность $T = 20$ мс и занимающими полосу частот $F = 10$ кГц, можно создать:

а) ортогональную систему, содержащую 400 реализаций;

б) биортогональную систему — 800 реализаций;

в) ортогональную в усиленном смысле систему — 200 реализаций.

1.4.7. Показать, что скалярное произведение двух сигналов — $s_1(t) = a_1 \cos \omega_1 t$ и $s_2(t) = a_2 \cos \omega_2 t$, заданных на интервале T,

$$(\vec{s}_1 \vec{s}_2) = \frac{1}{2\Delta\omega T} a_1 a_2 \sin \Delta\omega T$$

при условии $\omega_1 + \omega_2 \gg \omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega$.

Найти нормы сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

1.4.8. Показать, что расстояние между тремя произвольными сигналами — $s_1(t)$, $s_2(t)$ и $s_3(t)$, имеющими длительность T, удовлетворяют условию

$$d(\vec{s}_1, \vec{s}_3) \leqslant d(\vec{s}_2, \vec{s}_3) + d(\vec{s}_1, \vec{s}_2).$$

1.4.9. Показать, что ансамбль сигналов на входе приемника $\{s'_k(t)\}$, заданных в интервале $(0, T)$ в виде

$$s'_k(t) = \gamma \cos \varphi \, s_k(t) + \gamma \sin \varphi \, \hat{s}_k(t), \; k = 1, 2, \cdots, m,$$

где γ, φ — соответственно произвольный коэффициент передачи и фазовый сдвиг в канале, является ортогональным при условии, что ансамбль сигналов на передаче $\{s_k(t)\}$ является ортогональным в усиленном смысле.

1.4.10. По каналу связи передаются четыре двухразрядные двоичные комбинации, причем символу «0» соответствует первичный сигнал h, а символу «1» — сигнал $-h$. Положим, что, когда поэлементный приемник не может с большой надежностью (из-за помех в канале) принять решение в пользу элементарного символа «1» или «0», он регистрирует знак «?» (стирание), который фиксируется нулевым уровнем. Изобразить пространство первичных сигналов на передаче и приеме.

1.4.11. Даны три восьмиразрядные двоичные комбинации:

$$\vec{b}_1 = 01011001;\ \vec{b}_2 = 01000110;\ \vec{b}_3 = 10110010.$$

Показать, что расстояния по Хэммингу между заданными комбинациями удовлетворяют условию

$$d(\vec{b}_1, \vec{b}_3) \leqslant d(\vec{b}_1, \vec{b}_2) + d(\vec{b}_2, \vec{b}_3).$$

Решения и ответы

Р.1.4.1. Норму вектора s в n-мерном пространстве Эвклида найдем по ф-ле (1.42). В данном случае коэффициенты ряда Фурье, представляющего сигнал $s(t)$, есть не что иное, как координаты сигнала $s(t)$ в пространстве, координатный базис которого образован $2L$ функциями вида $\sqrt{2}\cos k\frac{2\pi}{T}t$ и $\sqrt{2}\sin k\frac{2\pi}{T}t$. Поэтому

$$\|s\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{L}(a_k^2 + b_k^2)};\quad \|s\|^2 = \sum_{k=1}^{L}(a_k^2 + b_k^2),$$

где $a^2{}_k$ и $b^2{}_k$ — квадраты эффективных значений k-х членов разложения сигнала $s(t)$. Это есть средняя мощность соответствующих слагаемых ряда. Сумма средних мощностей всех членов ряда дает полную среднюю мощность сигнала $s(t)$. Таким образом, квадрат нормы вектора имеет смысл средней мощности, а норма — смысл эффективного значения сигнала.

Р.1.4.2. Представим сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$ в виде

$$s_1(t) = \sum_{k=1}^{2FT} s_1(k\Delta t)\frac{\sin 2\pi F(t - k\Delta t)}{2\pi F(t - k\Delta t)};$$

$$s_2(t) = \sum_{k=1}^{2FT} s_2(k\Delta t)\frac{\sin 2\pi F(t - k\Delta t)}{2\pi F(t - k\Delta t)}.$$

В координатном базисе $\{g_k(t)\} = \left\{\frac{\sin 2\pi F(t - k\Delta t)}{2\pi F(t - k\Delta t)}\right\}$

координатами сигналов будут отсчеты $s(k\Delta t)$. В соответствии с ф-лой (1.41) находим $s_\Sigma(t)=s_1(k\Delta t)+$ $+s_2(k\Delta t)$.

Норма суммарного сигнала по ф-ле (1.42)

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{2FT} s_1^2(k\,\Delta\, t) + \sum_{k=1}^{2FT} s_2^2(k\,\Delta\, t) + 2\sum_{k=1}^{2FT} s_1(k\Delta t)\, s_2(k\Delta t)}.$$

Величина $\sum\limits_{k=1}^{2FT} s_1(k\Delta t)\, s_2(k\Delta t)$ есть скалярное произведение сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Оно равно нулю, так как по условию задачи сигналы ортогональны. Поэтому

$$\|\vec{s_\Sigma}\| = \sqrt{\|\vec{s_1}\|^2 + \|\vec{s_2}\|^2}.$$

Если нормы сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ одинаковы, то

$$\|\vec{s_\Sigma}\| = \sqrt{2}\,\|\vec{s_1}\| = \sqrt{2}\,\|\vec{s_2}\|.$$

Расстояние между сигналами по (1.43)

$$d(\vec{s_1}, \vec{s_2}) = \|\vec{s_1} - \vec{s_2}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{2FT} [s_1(k\,\Delta\, t) - s_2(k\,\Delta\, t)]^2} =$$

$$= \|\vec{s_\Sigma}\|.$$

Р.1.4.3. Выбирая в качестве координатного базиса совокупность функций

$$\varphi_1(t) = \sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{T}t;\quad \varphi_2(t) = \sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{T}t;$$

$$\varphi_3(t) = \sqrt{2}\sin 2\frac{2\pi}{T}t;\quad \varphi_4(t) = \sqrt{2}\cos 3\frac{2\pi}{T}t;$$

$$\varphi_5(t) = \sqrt{2}\sin 3\frac{2\pi}{T}t,$$

находим по (1.49)

$$s_{11} = a_1;\ s_{12} = b_1;\ s_{13} = 0;\ s_{14} = a_3;\ s_{15} = 0;$$

$$s_{21} = a_1;\ s_{22} = 0;\ s_{23} = b_2;\ s_{24} = 0;\ s_{25} = b_3;$$

$$(\vec{s_1}\vec{s_2}) = \sum_{i=1}^{5} s_{1i}s_{2i} = a_1^2;\ d(\vec{s_1}, \vec{s_2}) = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2}.$$

Р.1.4.4. Проверим первое условие (1.50)

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T a^2\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t+\varphi_1\right)\cos\left(l\,\frac{2\pi}{T}t+\varphi_1+\frac{\pi}{2}\right)dt=$$

$$=\frac{a^2}{2T}\left\{\frac{1}{(k+l)\dfrac{2\pi}{T}}\sin\left[(k+l)\frac{2\pi}{T}T+2\varphi_1+\frac{\pi}{2}\right]-\right.$$

$$-\frac{1}{(k+l)\dfrac{2\pi}{T}}\sin\left(2\varphi_1+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{(k-l)\dfrac{2\pi}{T}}\sin\left[(k-l)\frac{2\pi}{T}T-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\pi}{2}\right]-\frac{1}{(k-l)\dfrac{2\pi}{T}}\sin\frac{\pi}{2}\right\}=0,\ k\neq l.$$

Следовательно, сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$ согласно (1.48) являются ортогональными.

Теперь проверим второе условие (1.50):

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T s_1(t)\,\hat{s}_1(t)\,dt=\frac{1}{T}\int\limits_0^T a^2\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t+\varphi_1\right)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}t+\right.$$

$$\left.+\varphi_1\right)dt=0.$$

Аналогично

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T s_1(t)\,\hat{s}_2(t)\,dt=0.$$

Следовательно, сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$ являются ортогональными в усиленном смысле.

Расстояние между сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t)$ найдем по ф-ле (1.47):

$$d(\vec{s}_1,\vec{s}_2)=\sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_0^T\left[a\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t+\varphi_1\right)-a\times\right.}$$

$$\overline{\left.\times\cos\left(l\,\frac{2\pi}{T}t+\varphi_1+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2dt}=a.$$

Р.1.4.5. $x_1=a_1/\sqrt{2}$; $x_2=a_2/\sqrt{2}$; $x_3=a_3/\sqrt{2}$; $x_4=$ $=b_1/\sqrt{2}$; $x_5=b_2/\sqrt{2}$; $x_6=b_3/\sqrt{2}$; $\|\vec{s}\|=\sqrt{\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2+}$ $\overline{+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2}$

Р.1.4.6. Число сигналов ортогональной системы равно ее базе B, следовательно, $n_{\text{о.с}}=2FT=2\cdot 10^4\cdot 20\times 10^{-3}=400$. Число возможных сигналов в биортогональной системе равно удвоенному значению базы, т. е. $n_{\text{б.о.с}}=4FT=800$. Число возможных сигналов в ортогональной в усиленном смысле системе равно $\frac{B}{2}$: $n_{\text{о.у.с}}=FT=200$.

Р.1.4.7. $$(\vec{s}_1\vec{s}_2)=\frac{1}{T}\int\limits_0^T a_1a_2\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t\,dt=\frac{a_1a_2}{2T(\omega_1-\omega_2)}\times$$
$$\times\left[\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\sin(\omega_1+\omega_2)T+\sin(\omega_1-\omega_2)T\right].$$

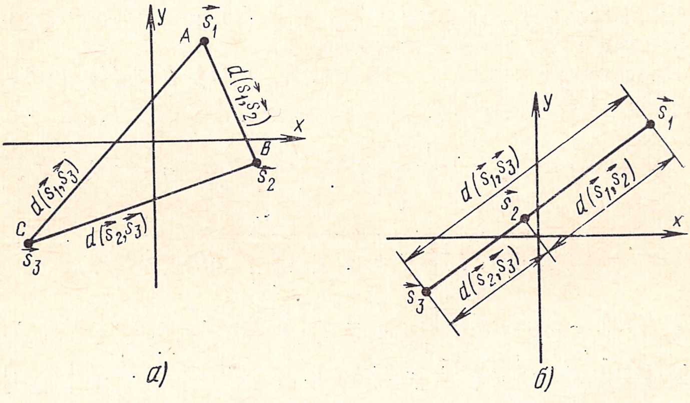
При $\omega_1+\omega_2\gg\omega_1-\omega_2=\Delta\omega$ первым слагаемым можно пренебречь. Тогда

$$(\vec{s}_1\vec{s}_2)=\frac{a_1a_2}{2T\,\Delta\omega}\sin\Delta\omega\, T.$$

По ф-ле (1.46)

$$\|\vec{s}_1\|=\sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_0^T a_1^2\cos^2\omega_1 t\,dt}=\frac{a_1}{\sqrt{2}},\quad \|\vec{s}_2\|=\frac{a_2}{\sqrt{2}}.$$

Р.1.4.8. На рис. 1.5*а* показаны сигналы $s_1(t)$, $s_2(t)$ и $s_3(t)$ в виде точек некоторого пространства. Эти точки представляют собой вершины некоторого треугольника ABC. Для сторон треугольника справедливо соот-



y
x
A
$\vec{s}_1$
B
$\vec{s}_2$
C
$\vec{s}_3$
$d(\vec{s}_1,\vec{s}_2)$
$d(\vec{s}_1,\vec{s}_3)$
$d(\vec{s}_2,\vec{s}_3)$
y
x
$\vec{s}_1$
$\vec{s}_2$
$\vec{s}_3$
$d(\vec{s}_1,\vec{s}_3)$
$d(\vec{s}_1,\vec{s}_2)$
$d(\vec{s}_2,\vec{s}_3)$

а) б)

Рис. 1.5. К решению задачи 1.4.8

ношение $\overline{AC} \leqslant \overline{AB} + \overline{BC}$ (условие треугольника). Длина отрезка AC равна норме вектора разности сигналов s_1 и s_2:

$$\overline{AC} = \| \vec{s}_1 - \vec{s}_3 \| = d(\vec{s}_1, \vec{s}_3).$$

Аналогично $\overline{AB} = d(\vec{s}_1, \vec{s}_2)$ и $\overline{BC} = d(\vec{s}_2, \vec{s}_3)$. Следовательно, $d(\vec{s}_1, \vec{s}_3) \leqslant d(\vec{s}_1, \vec{s}) + d(\vec{s}_2, \vec{s}_3)$, причем равенство достигается только в том случае, когда все три сигнала лежат на одной прямой (рис. 1.5*б*).

Р.1.4.9. $$(\vec{s'}_k \vec{s'}_l) = \frac{1}{T} \int_0^T s'_k(t) s'_l(t) dt = \frac{\gamma^2}{T} \Big[\cos^2\varphi \int_0^T s_k(t) \times s_l(t) dt + \cos\varphi \sin\varphi \int_0^T \hat{s}_k(t) s_l(t) dt + \cos\varphi \sin\varphi \int_0^T s_k(t) \times \hat{s}_l(t) dt + \sin^2\varphi \int_0^T \hat{s}_k(t) \hat{s}_l(t) dt\Big].$$

Если ансамбль сигналов на передаче удовлетворяет условию ортогональности в усиленном смысле (1.50), то $(\vec{s'}_k \vec{s'}_l) = 0$ и сигналы $\{s'_k(t)\}$ ортогональны.

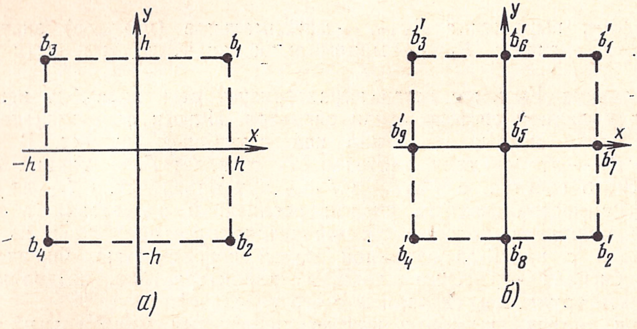


Рис. 1.6. Пространство сигналов на передаче (*а*) и приеме (*б*) при наличии стираний

Р.1.4.10. Четырем двухразрядным двоичным комбинациям — 0 0, 0 1, 1 0, 1 1 — соответствуют первичные сигналы $b_1 = (h, h)$, $b_2 = (h, -h)$, $b_3 = (-h, h)$, $b_4 = (-h, -h)$.

Пространство сигналов на передаче показано на рис. 1.6*а*. На приеме вследствие стирания могут образоваться дополнительно сигналы $b'_5 = (0, 0)$, $b'_6 = (0, h)$, $b'_7 =$

$=(h, 0)$, $b'_8=(0, -h)$, $b_9=(-h, 0)$. Пространство сигналов на приеме показано на рис. 1.6*б*.

Р.1.4.11. Найдем расстояния между заданными комбинациями $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ и $\vec{b}_3$ по ф-ле (1.52): $d(\vec{b}_1, \vec{b}_2)=$ $=\sum\limits_{i=1}^{\infty} \operatorname{mod}_2(x_{1i}+x_{2i})=5$; $d(\vec{b}_1, \vec{b}_3)=6$; $d(\vec{b}_2, \vec{b}_3)=5$.

Легко заметить, что $d(b_1, b_3)<d(\vec{b}_1, \vec{b}_2)+d(\vec{b}_2, \vec{b}_3)$, так как $6<5+5$. Аналогично $d(\vec{b}_1, \vec{b}_2)<d(\vec{b}_2, \vec{b}_3)+d(\vec{b}_1, \vec{b}_3)$, так как $5<6+5$, и $d(\vec{b}_2, \vec{b}_3)<d(\vec{b}_1, \vec{b}_2)+d(\vec{b}_1, \vec{b}_3)$, так как $5<6+5$.

1.5. Физический объем сигнала и канала связи

Физическим объемом сигнала V_c называют произведение трех его физических характеристик: длительности сигнала T_c, ширины спектра F_c и динамического диапазона уровней сигнала (по мощности) D_c:

$$V_c=T_cF_cD_c; \tag{1.53}$$

$$D_c=10\lg\frac{P_{\text{макс}}}{P_{\text{мин}}}. \tag{1.54}$$

В этом выражении $P_{\text{макс}}$ — максимальное (пиковое) значение мощности сигнала; $P_{\text{мин}}$ — минимальное значение мощности сигнала.

Величина V_c чаще всего характеризует весь ансамбль используемых в данной системе связи сигналов. Иными словами, эта характеристика описывает сигнал как случайный процесс. В этом случае T_c — это средняя длительность сигнала; F_c — ширина энергетического спектра, а $P_{\text{макс}}$ и $P_{\text{мин}}$ при определении D_c для ансамбля с неограниченным числом реализаций представляют собой уровни мощности, которые соответственно превышаются и не превышаются с какой-то заданной малой вероятностью. Физический объем сигнала — весьма важная характеристика, позволяющая оценивать трудности, связанные с его передачей.

При наличии шумов в канале допустимый минимальный уровень мощности $P_{\text{мин}}$ обычно определяется средней мощностью шумов в канале. Поэтому можно записать

$$D_c=10\lg\frac{P_{\text{макс}}}{P_{\text{ш}}}. \tag{1.55}$$

Максимальную мощность $P_{\text{макс}}$ иногда выражают через усредненную за достаточно большой интервал времени мощность сигнала P_c. В этом случае

$$D_c=10\lg\frac{\Pi^2 P_c}{P_{\text{ш}}}, \tag{1.56}$$

где $П^2 = \frac{P_{\text{макс}}}{P_{\text{мин}}}$ — пикфактор сигнала по мощности. Эта величина зависит от статистики сигнала. Отношение средних мощностей сигнала и шума $P_с/P_ш$ часто называют просто отношением *сигнал/шум*.

Аналогично физическому объему сигнала можно ввести характеристику, называемую физическим объемом канала

$$V_к = T_к F_к D_к. \tag{1.57}$$

Здесь $T_к$ — время использования канала; $F_к$ — полоса пропускаемых каналом частот; $D_к$ — динамический диапазон уровней, пропускаемых каналом с допустимыми искажениями.

Для передачи сигнала, имеющего объем $V_с$, с достаточно высоким качеством следует выполнять неравенство

$$V_с \leqslant V_к. \tag{1.58}$$

При этом необходимо согласование сигнала и канала по всем трем параметрам, т. е.

$$T_с \leqslant T_к, \quad F_с \leqslant F_к, \quad D_с \leqslant D_к. \tag{1.59}$$

Выполнение этих условий означает, что для обеспечения удовлетворительного качества при передаче сигналов требуется, чтобы объем сигнала «вписывался» в объем канала.

Естественно, что необходимо также согласование сигнала и канала в пределах общих интервалов времени, частот и уровней.

Задачи

1.5.1. Показать, что физический объем телевизионного сигнала превосходит физический объем радиовещательного сигнала при одинаковой их длительности в 540 раз. $F_{тв} = 6{,}5$ МГц, $F_{рв} = 12$ кГц. (Динамические диапазоны телевизионного и радиовещательного сигналов следует считать одинаковыми.)

1.5.2. Текст из ста букв передается по телефонному каналу в течение 30 с. Тот же текст за то же время передается по телеграфному каналу пятизначным двоичным кодом. Приняв динамические диапазоны телефонного и телеграфного сигналов равными, показать, что телеграфный сигнал экономичнее телефонного в 62 раза.

1.5.3. Канал связи с полосой $F_к = 10$ кГц предполагается использовать в течение 10 с. В канале действует шум с равномерной спектральной плотностью мощности $G_ш = 10^{-4}$ мВт/Гц. Какова предельная мощность сигнала, который может быть передан по данному каналу, если физический объем канала $V_к = 1\,000\,000$.

1.5.4. Амплитудно-модулированный сигнал $s_{АМ}(t) = U_m(1 + m \sin \Omega t) \cos \omega_0 t$ предполагается передать по каналу с объемом $V_к = 10\,000$. Найти допустимый коэффициент глубины модуляции m, если полоса частот сигнала $F_с=100$ Гц, а его длительность $T_с=10$ с.

1.5.5. По каналу связи, в котором действует шум с энергетическим спектром

$$G_0(f)=\frac{\sqrt{\pi}\,B(0)}{\beta}\exp\left[-\frac{\pi^2(f-f_0)^2}{\beta^2}\right],$$

передается ЧМ сигнал $s_{ЧМ}(t)=U_m\cos\left(\omega_0 t+\Delta\omega\int\limits_0^t b(t)dt+\varphi_0\right)$. Полоса сигнала $F_с=100$ кГц, длительность $T_с=10$ с. Определить допустимую амплитуду сигнала, если $V_к=2\cdot10^7$; $\beta=1{,}13\cdot10^5$, $B(0)=10^{-2}$ Вт.

1.5.6. Сигнал на выходе канала связи имеет огибающую, распределенную по закону Рэлея

$$w_1(A)=\frac{2A}{\overline{A^2}}\exp\left(-\frac{A^2}{\overline{A^2}}\right),\quad A\geqslant 0,$$

где A — мгновенное значение амплитуды сигнала; $\overline{A^2}$ — средний квадрат амплитуды.

Полоса частот сигнала $F_с=4$ кГц, а его длительность $T_с=10$ с. Найти объем сигнала, если за максимальный и минимальный уровни мощности сигнала приняты такие величины, которые соответственно превышаются и не превышаются с вероятностью $p=10^{-3}$.

Решения и ответы

Р.1.5.1. Очевидно, что при одинаковых длительностях и динамических диапазонах двух сигналов отношение их объемов будет равно отношению их частотных полос:

$$\frac{V_{тв}}{V_{рв}}=\frac{F_{тв}}{F_{рв}}=\frac{6{,}5\cdot10^6}{12\cdot10^3}\approx540.$$

Р.1.5.2. Аналогично Р.1.5.1

$$\frac{V_{тлф}}{V_{тлг}}=\frac{F_{тэф}}{F_{тлг}}.$$

Для удовлетворительной передачи телефонного сообщения в спектре речевого сигнала достаточно сохранить частотные составляющие в полосе 300—3400 Гц. Поэтому примем $F_{тлф}=3100$ Гц. Найдем полосу телеграфного сигнала. Эта величина зависит от длительности элементарного импульса следующим образом: $F_{тлг}=n/\tau_и$, где n — целое число порядка единицы.

Определим величину $\tau_и$. За время 30 с по телеграфному каналу передается 100 букв, каждой из которых соответствует кодовая комбинация, содержащая пять элементарных импульсов. Следовательно, за 30 с будет передано 500 импульсов и длительность каждого импульса

$$\tau_и = \frac{30}{500} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ с}.$$

Поскольку для удовлетворительного воспроизведения обычно достаточно сохранить в спектре третью гармонику частоты повторения импульсов, примем $F_{тлг} = 3/\tau_и = 50$ Гц. Отсюда $\frac{V_{тлф}}{V_{тлг}} = \frac{3100}{50} = 62$, т. е. телеграфный сигнал экономичнее телефонного в 62 раза.

Р.1.5.3. По ф-ле (1.55)

$$P_{макс} = P_ш \cdot 10^{D_с/10}.$$

Величину динамического диапазона сигнала, который может быть передан по заданному каналу, найдем с учетом (1.58) по ф-ле (1.53)

$$D_с = \frac{V_к}{T_к F_к} = 10.$$

С учетом этого результата получаем $P_{макс} = 10 P_ш$. Найдем теперь мощность шума в канале с полосой $F_к = 10$ кГц

$$P_ш = G_ш F_к = 10^{-4} \cdot 10^4 = 1 \text{ мВт}.$$

Отсюда $P_{макс} = 10$ мВт.

Р.1.5.4. Предполагая, что заданный сигнал и канал согласованы по полосе и длительности (времени использования), найдем допустимый динамический диапазон АМ сигнала, который можно передать без существенных искажений по каналу с заданным объемом:

$$D_с = \frac{V_к}{T_с F_с} = 10.$$

Выразим теперь максимальную и минимальную мощности АМ сигнала (за период модулирующего процесса) через величину коэффициента глубины модуляции:

$$P_{макс} = U_m^2 (1 + m)^2; \; P_{мин} = U_m^2 (1 - m)^2.$$

Подставляя найденные значения $P_{\text{макс}}$ и $P_{\text{мин}}$ в выражение для D_{c}, получаем

$$D_{\text{c}} = 10 \lg \frac{(1+m)^2}{(1-m)^2} \text{ или } \frac{(1+m)^2}{(1-m)^2} = 10^{D_{\text{c}}/10}.$$

В данном случае $D_{\text{c}}=10$ и $(1+m)/(1-m)=\sqrt{10}$. Отсюда получаем $m=0{,}52$.

Р.1.5.5. Если длительность и полоса сигнала согласованы с соответствующими параметрами канала, то $D_{\text{c}}=\frac{V_{\text{к}}}{F_{\text{c}}T_{\text{c}}}=20$. Так как в соответствии с (1.55) $D_{\text{c}}=10 \lg \frac{P_{\text{макс}}}{P_{\text{ш}}}$, находим

$$\frac{P_{\text{макс}}}{P_{\text{ш}}} = 10^{D_{\text{c}}/10} = 100.$$

При ЧМ пиковая мощность сигнала $P_{\text{макс}}=U^2_m$. Найдем среднюю мощность шума в канале в полосе сигнала

$$P_{\text{ш}} = \int\limits_{f_0-F_{\text{c}}/2}^{f_0+F_{\text{c}}/2} G_0(f)\,df = \frac{B(0)\sqrt{\pi}}{\beta} \times$$

$$\times \int\limits_{f_0-F_{\text{c}}/2}^{f_0+F_{\text{c}}/2} \exp\left[-\frac{\pi^2 (f-f_0)^2}{\beta^2}\right] df.$$

Вводя обозначение $\sigma=\frac{\beta}{\pi\sqrt{2}}$, получаем

$$P_{\text{ш}} = \frac{B(0)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{f_0-F_{\text{c}}/2}^{f_0+F_{\text{c}}/2} \exp\left[-\frac{(f-f_0)^2}{2\sigma^2}\right] df.$$

После замены переменной $t=(f-f_0)/\sigma$ имеем $P_{\text{ш}}=B(0)\Phi\left(\frac{F_{\text{c}}}{2\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ — функция Крампа:

$$P_{\text{ш}} = 10^{-2}\, \Phi\left(\frac{50\cdot 10^3}{1{,}13\cdot 10^5}\sqrt{2\pi}\right) = 9{,}5\cdot 10^{-3} \text{ Вт}.$$

С учетом этого результата имеем

$$U_m = \sqrt{P_{\text{макс}}} = \sqrt{100 P_{\text{ш}}} = 0{,}975 \text{ В}.$$

Р.1.5.6. Вероятность того, что уровень мощности $P_{\text{мин}} = A^2_{\text{мин}}$ не будет превышен, равна вероятности того, что амплитуда замирающего сигнала будет не больше $A_{\text{мин}}$:

$$P(A < A_{\text{мин}}) = \int\limits_0^{A_{\text{мин}}} \frac{2A}{\overline{A^2}} \exp\left(-\frac{A^2}{\overline{A^2}}\right) dA = 1 - \exp\left(-\frac{A^2_{\text{мин}}}{\overline{A^2}}\right).$$

Отсюда находим $P_{\text{мин}} = A^2_{\text{мин}} = -\overline{A^2}\ln[1 - P(A < A_{\text{мин}})]$. По условию $P(A < A_{\text{мин}}) = 10^{-3}$. Поэтому $P_{\text{мин}} = -\overline{A^2}\ln(0{,}999) = 2{,}3\cdot 10^{-3}\overline{A^2}$. Аналогично для $P_{\text{макс}} = A^2_{\text{макс}}$ находим $P_{\text{макс}} = -\overline{A^2}\ln 10^{-3} = 6{,}9\overline{A^2}$. Найдем динамический диапазон.

$$D_{\text{с}} = 10\lg\frac{P_{\text{макс}}}{P_{\text{мин}}} = 34{,}7 \text{ дБ}.$$

По ф-ле (1.53) $V_{\text{с}} = 34{,}7\cdot 10\cdot 4\cdot 10^3 = 1{,}39\cdot 10^6$.

Глава 2

КАНАЛЫ СВЯЗИ И ИХ ЗВЕНЬЯ

2.1. Модели каналов связи и их математическое описание

Под каналом связи в широком смысле понимают совокупность средств, предназначенных для передачи сообщений и соответствующих им сигналов. Для примера на рис. 2.1 представлена структурная схема канала связи при передаче дискретных сообщений.

Классификацию каналов связи можно осуществлять по различным критериям, в частности, по характеру сигналов на их входе и выходе. С этой точки зрения различают три типа каналов.

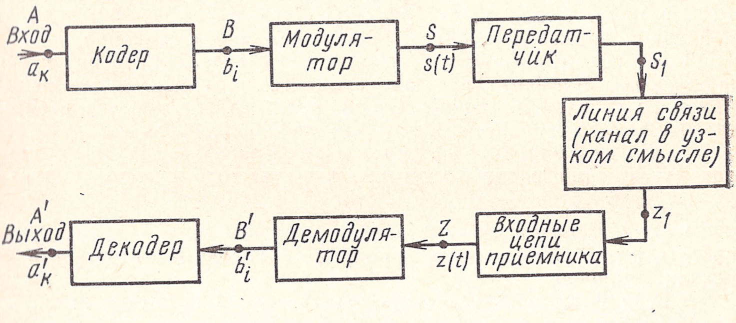

A
Вход
$a_к$
Кодер
B
b_i
Модулятор
S
s(t)
Передатчик
S_1
Линия связи (канал в узком смысле)
z_1
Входные цепи приемника
Z
z(t)
Демодулятор
B'
b'_i
Декодер
A'
Выход
$a'_к$

Рис. 2.1. Структурная схема канала связи при передаче дискретных сообщений

1. Дискретные каналы. На входе и выходе таких каналов наблюдаются дискретные сигналы (как по уровням, так и состояниям информационного параметра во времени) или те, или иные символы из конечномерного ансамбля. Примерами таких каналов являются каналы, заданные между точками $A—A'$, $B—B'$, $A—B$, $B'—A'$ на рис. 2.1.

Следует подчеркнуть, что дискретность или непрерывность канала определяется только характером информационных параметров сигналов на его входе и выходе.

Дискретный канал математически описан, если заданы алфавит кодовых символов на входе b_i ($i=1, 2, 3, \ldots, m$) вместе с их вероятностями $P(b_i)$[1], алфавит кодовых символов на выходе b'_k ($k=1, 2, \ldots, m'$) и значения вероятностей переходов $P(b'_k/b_i)$ ($i=1, 2, \ldots, m$; $k=1, 2, \ldots, m'$), т. е. вероятностей того, что на выходе канала появится символ b'_k при условии, что на вход подан символ b_i[2].

Совместная вероятность подачи символа b_i на вход и появления символа b'_k на выходе

$$P\left(b_i, b'_k\right) = P\left(b_i\right)P\left(b'_k/b_i\right) = P\left(b'_k\right)P\left(b_i/b'_k\right). \qquad (2.1)$$

Вероятность того, что на вход подан символ b_i при условии, что на выходе появится символ b'_k (апостериорная вероятность)

$$P\left(b_i/b'_k\right) = \frac{P\left(b_i\right)P\left(b'_k/b_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{m} P\left(b_i\right)P\left(b'_k/b_i\right)} \qquad (2.2)$$

(формула Байеса).

Дискретный канал называется однородным (стационарным) и без памяти, если вероятности переходов $P(b'_k/b_i)$ для каждой пары, i, k не меняются во времени и не зависят от того, какие символы передавались ранее.

Если эти вероятности зависят от времени, канал называется неоднородным (нестационарным); если же они зависят от символов, переданных ранее, то канал называется каналом с памятью.

Если в однородном дискретном канале алфавиты на входе и выходе одинаковы ($m=m'$) и для любой пары $i \neq k$ вероятности $P(b'_k/b_i)=p_0$, а для пары $i=k$ $P(b'_k/b_i)=q=1-(m-1)p_0$, то такой канал называют симметричным каналом без стирания.

Если объем алфавита символов на выходе канала m' превышает объем алфавита входных символов m, канал называют каналом со стиранием. Чаще всего на практике встречаются дискретные каналы со стиранием, в которых $m'=m+1$.

2. Дискретно-непрерывные каналы. В таких каналах сигналы на входе дискретны, а на выходе — непрерывны (по

---

[1] Если источник имеет память, то должны быть заданы вероятности цепочек символов или априорные и условные вероятности передачи символов.

[2] Если интересоваться скоростью передачи информации по каналу, то следует также задать количество символов, подаваемых в среднем в единицу времени на вход канала. Однако эта характеристика рассматриваться не будет.

уровням) или наоборот. Примерами таких каналов являются каналы, заданные между точками B—Z; A—Z_1; Z—A' рис. 2.1.

Очень часто в технике связи определяют или обрабатывают непрерывные сигналы лишь в дискретных точках оси времени. В этом случае говорят о сигнале или соответствующем канале с дискретным временем.

Будем для определенности в дальнейшем считать, что дискретно-непрерывный канал имеет дискретный вход и непрерывный выход.

Дискретно-непрерывный канал математически описан, если заданы алфавит входных символов b_i ($i=1, 2, 3, \ldots, m$) вместе с их априорными вероятностями $P(b_i)$ и плотности переходных вероятностей $w(z/b_i)$ того, что на выходе канала появится элемент колебания $z(t)$ при условии, что на вход поступил символ b_i.

Эти плотности называют функцией правдоподобия того, что передан символ b_i при условии, что фиксирована на выходе канала реализации колебания $z(t)$.

Если $Z(t)=s'_i(t)+U(t)$, где $s'_i(t)$ — принимаемый на интервале анализа T-сигнал, обусловленный подачей на вход канала символа b_i, а $U(t)$ — аддитивный (линейно-складывающийся с сигналом) шум в канале, то в том случае, когда сигнал $s'_i(t)$ полностью детерминирован (его параметры известны точно в месте приема),

$$w(z/b_i) = w(u(t) = z(t) - s_i'(t)), \tag{2.3}$$

т. е. функция правдоподобия определяется плотностью вероятности шума в канале.

При дискретном времени функция правдоподобия (2.3) — это многомерная (n-мерная) плотность вероятности. При $n \to \infty$ можно получить функцию правдоподобия (при непрерывном времени — функционал правдоподобия). Так, если в канале действует гауссовский аддитивный белый шум $U(t)$ со спектральной плотностью $G_ш$, то

$$w(z(t)/b_i) = K \exp\left\{-\frac{1}{G_ш}\int_0^T [z(t) - s_i'(t)]^2\, dt\right\}, \tag{2.4}$$

где K определяется условием нормирования [1].

Вероятность того, что при заданном элементе принятого колебания $z(t)$ был передан символ b_i (апостериорная вероятность), определяется формулой

$$P(b_i/z(t)) = \frac{P(b_i)\, w(z/b_i)}{w(z)}, \tag{2.5}$$

где $w(z)=\sum\limits_{i=1}^{m} P(b_i)w(z/b_i)$ — плотность вероятности элемента сигнала $z(t)$.

---

[1] В дальнейшем будем интересоваться нормированными значениями функционалов правдоподобия $w(z/b_i)/K$ или их отношением. Поэтому вопросы сходимости коэффициента K здесь рассматриваться не будут.

Если плотности вероятности $w(z/b_i)$ для любого сочетания $z(t)$, b_i остаются постоянными во времени и не зависят от того, какие символы b_i и элементы $z(t)$ фиксировались ранее, то дискретно-непрерывный канал называется однородным (стационарным) и без памяти. Если плотности вероятности $w(z/b_i)$ зависят от времени, то канал неоднороден (нестационарен). Если они зависят от предыдущих символов, то канал обладает памятью.

3. Непрерывные каналы. В таких каналах сигналы на входе и выходе непрерывны (по уровням).

Для математического описания непрерывного канала надо задать плотности вероятности входных сигналов $w(s)$ и условные плотности вероятности перехода $w(z/s)$.

Канал однороден (стационарен), если плотности вероятности переходов $w(z/s)$ не зависят от времени, и без памяти, если значения выходного сигнала в момент времени t не зависят от значения входного сигнала $s(t)$ в тот же момент времени. Если же значения сигнала $Z(t)$ в момент времени t зависят от значений входных сигналов и в предшествующие моменты времени, то канал имеет память.

Задачи

2.1.1. На вход канала связи на интервале T поступает сигнал $s_i(t)=a\cos(\omega_0 t+\frac{2\pi}{m}i)$, где a, ω_0, m — постоянные; $i=1, 2, 3, \dots, m$. С выхода канала снимается сигнал $s'_i(t)=\gamma a\cos(\omega_0 t+\varphi)$, где φ — случайная фаза, равномерно распределенная на интервале $\{0, 2\pi\}$. Показать, что по амплитуде сигналов канал является непрерывным, а по параметру φ — дискретно-непрерывным.

2.1.2. На вход канала поступает периодическая последовательность прямоугольных импульсов, промодулированных по фазе непрерывным сообщением, а с выхода снимается аддитивная смесь этого сигнала и флуктуационного шума. Показать, что по амплитудам сигнала канал является дискретно-непрерывным, а по отношению к фазам импульсов — непрерывным.

2.1.3. Показать, что вероятность того, что при передаче символов по двоичному однородному симметричному каналу без памяти и стирания будет принято ошибочно $q \leqslant n$ символов, определяется формулой

$$P(q) = C_n^2\, p_0^q (1 - p_0)^{n-q},$$

где p_0 — вероятность ошибочного приема элементарного символа; C_n^q — число сочетаний из n по q.

2.1.4. Показать, что среднее число ошибок в цепочке из n символов в стационарном двоичном симметричном канале без памяти и стирания

$$\overline{q} = \sum_{q=0}^{n} qP(q) = np_0,$$

где p_0 — вероятность одиночной ошибки. Показать также, что при $np_0 \ll 1$ справедлива следующая формула для вероятности ошибок кратности $q : P(q) \approx C^q{}_n p^q{}_0$, и, как следствие, вероятность ошибки падает с ростом ее кратности.

2.1.5. Показать, что в дискретном однородном симметричном канале без памяти и стирания с вероятностями перехода $P(b'_j/b_i) = 1 - p_1$ при $i = i$, $P(b'_j/b_i) = p_0$ при $i \neq j \neq m'$ и $P(b'_{m'}/b_i) = P(?/b_i) = p_c$ ($i = 1, 2, ..., m$; «?» — символ стирания в месте приема, которому присвоен номер $m' = m+1$) апостериорные вероятности передачи символов определяются соотношениями:

$$P(b_i/b'_j) = \frac{P(b_i)(1-p_1)}{P(b_i)(1-p_1) + [1 - P(b_i)]\,p_0}, \quad i = j \neq m',$$

$$P(b_j/b'_j) = \frac{P(b_i)\,p_0}{P(b_i)(1-p_1) + [1 - P(b_j)]\,p_0}, \quad i \neq j \neq m';$$

$$P(b_i/?) = P(b_i). \quad p_1 = p_c + (m-1)\,p_0$$

2.1.6. Показать, что в дискретном однородном канале без памяти со стиранием ($m' = m+1$):

а) средняя (безусловная) вероятность правильного приема символов

$$p_{\text{прав}} = \sum_{j=1}^{m} P(b_j, \qquad {}'_j) = \sum_{j=1}^{m} P(b_j)\,P(\,b'_j/b_j);$$

б) безусловная вероятность ошибочного приема символов

$$p_{\text{ош}} = \sum_{i=1;}^{m} \sum_{j\neq i;\; j\neq m'} P(b_i,\,b'_j) = \sum_{i=1}^{n} P(b_i) \sum_{j\neq i;\; j\neq m'} P(\,b'_j/b_i);$$

в) безусловная вероятность стирания символов

$$p_{\text{ст}} = \sum_{i=1}^{m} P(b_i)\,P(?/b_i).$$

2.1.7. Показать, что характеристики дискретного однородного канала без памяти со стиранием ($m' = m+ +1$) не зависят от априорных вероятностей передачи символов и определяются только вероятностями переходов при условиях $P(b'_j/b_j)=1-p_{\text{ош}}-p_{\text{c}}$; $P(b'_j/b_i)=p_0$; $P(?/b_i)=p_{\text{c}}$ (симметричный канал).

2.1.8. Двоичный однородный симметричный канал со стиранием характеризуется следующими вероятностями переходов:

$$1-p_0=P(b'_1/b_1)=P(b'_2/b_2)=0{,}7;\ p_0=P(b'_1/b_2)=$$
$$=P(b'_2/b_1)=0{,}01;\ p_{\text{c}}=P(?/b_1)=P(?/b_2)=0{,}29.$$

Найти апостериорные вероятности передачи символов, безусловную вероятность ошибочного приема и безусловную вероятность стирания. Априорные вероятности передачи символов считать одинаковыми $P(b_1)=$ $=P(b_2)=\frac{1}{2}$.

2.1.9. Задан двоичный однородный канал без стирания и с памятью, простирающейся на два соседних символа. Пусть ошибки в таком канале описываются простой цепью Маркова, причем вероятность того, что данный символ будет принят ошибочно, равна p_1 при условии, что предшествующий символ принят верно, и p_2, если предшествующий символ принят ошибочно.

Показать, что в таком канале безусловная (средняя) вероятность ошибки

$$p_{\text{ош}}=\frac{p_1}{1+p_1-p_2}.$$

Объяснить, почему при такой модели канала имеет место группирование ошибок, если $p_2>p_1$, и рассредоточение ошибок, если $p_1>p_2$.

2.1.10. На вход дискретно-непрерывного канала на тактовом интервале T поступают двоичные сигналы $s_1(t)=a\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$ или $s_2(t)=-a\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$ (манипуляция фазы на π). Колебание на выходе канала на интервале анализа T можно представить в виде

$$z(t)=s'_i(t)+u(t),\ s'_i(t)=\gamma(t)\,s_i(t-\tau),$$

где $\gamma(t)$, $\tau(t)$ — коэффициент передачи канала и запаздывание сигнала в канале; $u(t)$ — реализация нормального флуктуационного шума с равномерным энергетическим спектром в полосе $0, F$ ($F\ll\omega_0/2\pi$).

Полагая, что все параметры сигнала известны точно в месте приема (модель канала с постоянными параметрами), а колебание $z(t)$ анализируется на интервале T в дискретных сечениях t_k, кратных величине $\Delta t = 1/2F$, написать выражения для функций правдоподобия $w_1(z/s_1)$ и $w_1(z/s_2)$.

2.1.11. По условию предыдущей задачи найти выражение функционала правдоподобия $w(z/b_i)$, полагая, что в канале действует белый шум ($F \to \infty$).

2.1.12. Показать, что в дискретно-непрерывном канале сравнение величин апостериорных вероятностей передачи символов $P(b_i/z)$ с различным номером для выбора наибольшей сводится к сравнению функций правдоподобия $w(z/b_i)$, умноженных на $P(b_i)$ раз.

2.1.13. При передаче узкополосных сигналов $s_i(t)$ колебание на выходе канала можно часто представить в виде $z(t) = s'_i(t) + u(t)$, где $s'_i(t) = \gamma \cos\theta_к s_i(t) - \gamma \sin\theta_к \hat{s}_i(t)$, $\hat{s}_i(t)$ — сопряженный сигнал, а γ и $\theta_к$ — коэффициент передачи и фазовый сдвиг в канале.

Полагая, что $u(t)$ — реализация стационарного аддитивного нормального белого шума со спектральной плотностью мощности $G_ш$, а фаза сигнала случайна и имеет равномерное распределение на интервале $(-\pi, \pi)$ (модель канала с неопределенной фазой), найти функционал правдоподобия.

2.1.14. По условию предыдущей задачи найти функционал правдоподобия $w(z/s_i)$, полагая, что амплитуда и фаза принимаемого сигнала случайны (модель однолучевого канала с замираниями), а квадратурные компоненты сигнала $X(t) = \gamma \cos\theta_к$ и $Y(t) = \gamma \sin\theta_к$ независимы и распределены нормально с параметрами m_x, σ^2_x, m_y, σ^2_y.

Решения и ответы

Р.2.1.1. Поскольку информация заложена в изменения фазы, а амплитуда как на входе канала a, так и на его выходе γ_a может быть произвольной, канал непрерывен по амплитуде. Дискретность же канала по фазе на входе канала и его непрерывность на выходе следует из условия задачи.

Р.1.2.2. Здесь рассуждения аналогичны приведенным в Р.2.1.1.

Р.2.1.3. Под ошибкой кратности q понимают событие, состоящее в том, что какие-либо q символов из n переданных приняты ошибочно, а остальные $n-q$ символов приняты правильно.

Вероятность такого события в рассматриваемом канале $p^q_0(1-p_0)^{n-q}$.

Так как q ошибок в цепочке из n символов могут появиться в $C^q{}_n$ взаимно несовместимых случаях, по правилу сложения вероятностей получаем результат (2.1).

Р.2.1.4. Используя ф-лу (2.1), находим[1]

$$\overline{q} = \sum_{q=1}^{n} C_n^q p_0^q (1-p_0)^{n-q}\, q.$$

Поскольку $C^q{}_n = C^{q-1}{}_{n-1}\dfrac{n}{q}$, то

$$\overline{q} = np_0 \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{q-1} p_0^{q-1} (1-p_0)^{n-1-(q-1)} =$$

$$= np_0 \sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^{r} p^r (1-p_0)^{n-1-r}.$$

Последняя сумма, представляющая собой сумму вероятностей полной группы событий, равна единице. Следовательно, $\bar{q} = np_0$.

Как следует из (2.1), $p(q) \approx C^q{}_n p^q{}_0$, если принять $(1-p_0)^{n-q} \approx 1$. Покажем, что при $np_0 \ll 1$ это имеет место. Рассмотрим величину $(1-p_0)^n$. При $np_0 \ll 1$ $(1-p_0)^n = \left(1-\dfrac{np_0}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-p_0 n} \approx 1$. Поскольку $n-q \leqslant n$, то и $(1-p_0)^{n-q} \approx 1$.

Р.2.1.5. Искомые результаты следуют из общей формулы для апостериорной вероятности передачи символов в дискретном канале (2.2). Заметим, что если в рассматриваемом симметричном канале положить входные символы равновероятными $(P(b_i) = 1/m)$, то

$$P(b_i/b'_j) = \frac{1-p_1}{1-p_c}, \; i = j \neq m'; \quad P(b_i/b'_j) = \frac{p_0}{1-p_c}, \; i \neq j \neq m';$$

$$P(b_i/?) = \frac{1}{m}.$$

Р.2.1.6. Формулы для $p_{\text{прав}}$, $p_{\text{ош}}$ и $p_{\text{ст}}$ следуют из определения искомых характеристик, если принять, что символу стирания на выходе канала «?» присвоен номер $j = m'$, а ошибка при передаче символов имеет место, если номера символов на передаче и приеме не совпадают $(i \neq j \neq m')$.

---

[1] Суммирование выполнено от $q=1$, так как при $q=0$ член суммы равен нулю.

Р.2.1.7. При симметрии канала с учетом Р.2.1.6 имеем

$$p_{\text{прав}} = 1 - p_{\text{ош}} - p_{\text{с}};\ p_{\text{ош}} = (m-1)\,p_0;\ p_{\text{ст}} = 1 - p_{\text{прав}} - p_{\text{ош}}.$$

Найденные вероятности не зависят от априорных вероятностей передачи символов.

Р.2.1.8. Согласно Р.2.1.5 и Р.2.1.7 имеем:

$$P\left(b_i/b'_j\right) = 0{,}986,\ i = j = 1{,}2;\ p\left(b_i/b'_j\right) = 0{,}014,\ i \neq j;$$

$$P\,(b_i/?) = 0{,}5;\ p_{\text{прав}} = 0{,}7;\ p_{\text{ош}} = 0{,}01;\ p_{\text{ст}} = 0{,}29.$$

Р.2.1.9. Если предшествующий символ принят ошибочно с вероятностью $p_{\text{ош}}$, то возникает ошибка с вероятностью p_2. Если же предшествующий символ принят правильно с вероятностью $1-p_{\text{ош}}$, то возникает ошибка с вероятностью p_1. Таким образом, средняя вероятность ошибки удовлетворяет уравнению $p_{\text{ош}} = p_{\text{ош}}p_2 + (1 - p_{\text{ош}})\,p_1$, откуда

$$p_{\text{ош}} = \frac{p_1}{1 + p_1 - p_2}.$$

Если $p_2 > p_1$, то ошибочно принятые символы с большей вероятностью предопределяют ошибочный прием следующего символа. В этом случае $p_2 > p_{\text{ош}} < 0{,}5$ и ошибки в канале группируются.

Если же $p_2 < p_1$, то после ошибочно принятого символа с большей вероятностью следующий символ будет принят правильно. При этом $p_2 < p_{\text{ош}}$, т. е. в канале происходит рассредоточение ошибок.

Р.2.1.10. Поскольку нормальный шум в анализируемых дискретных сечениях не коррелирован, а следовательно, и независим, то его совместная $\left(n = \frac{T}{\Delta t} = 2FT\right)$-мерная плотность вероятности

$$w_n(u) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\, G_{\text{ш}} F}}\right)^n \mathrm{e}^{-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} u^2(t_k)}{2G_{\text{ш}}F}},$$

где $G_{\text{ш}}F = \sigma^2$ — дисперсия шума. Поэтому функции правдоподобия

$$w\,(z/s_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\, G_{\text{ш}} F}}\right)^n \mathrm{e}^{-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \{z(t_k) - \gamma(t_k)\, a\cos[\omega_0(t_k - \tau(t_k)) + \varphi_0]\}^2}{2G_{\text{ш}}F}};$$

$$w(z/s_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G_{\text{ш}} F}}\right)^n e^{-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \{z(t_k) + \gamma(t_k) a \cos[\omega_0 (t_k - \tau(t_k)) + \varphi_0]\}^2}{2G_{\text{ш}} F}}.$$

Р.2.1.11. Полагая шаг дискретизации $\Delta t = 1/2F \to 0$ (т. е. $F \to \infty$) и переходя в выражениях для $w(z/s_i)$ (Р.2.1.10) от сумм к интегралам, получаем следующие значения для функционала правдоподобия:

$$w(z/s_i) = K \exp\left[-\frac{1}{G_{\text{ш}}} \int_0^T [z(t) - s'_i(t)]^2 \, dt\right],$$

где $K = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G_{\text{ш}} F}}\right)^n_{F \to \infty}$. Поскольку в дальнейшем интересуемся только отношением функций правдоподобия (или результатом их сравнения при различных i), то расхождение нормирующего коэффициента K можно не учитывать.

Р.2.1.12. Используя формулу Байеса (2.5), можно видеть, что система неравенств $P(x_i/z) > P(x_j/z)$, $i \neq j$, равносильна другой системе неравенств $P(x_i) w(z/x_i) > P(x_j) w(z/x_j)$, $i \neq j$.

Р.2.1.13. При известном точно сигнале с учетом (2.4) функционал правдоподобия

$$w(z/s_i) = K \exp\left[-\frac{1}{G_{\text{ш}}} \int_0^T [z(t) - \gamma \cos\theta \, s_i(t) + \right.$$

$$\left. + \gamma \sin\theta \, \hat{s}_i(t)]^2 \, dt\right] = K_1 \exp\left[\frac{2}{G_{\text{ш}}} (\cos\theta \, Y_i + \sin\theta \, \hat{Y}_i - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \gamma^2 E_i)\right],$$

где $K_1 = K \exp\left[-\frac{1}{G_{\text{ш}}} \int_0^T z^2(t) \, dt\right]$ — константа, не зависящая от i;

$$Y_i = \int_0^T z(t) \, s_i(t) \, dt; \quad \hat{Y}_i = \int_0^T z(t) \, \hat{s}_i(t) \, dt;$$

$E_i = \int_0^T s^2{}_i(t) \, dt = \int_0^T \hat{s}^2{}_i(t) \, dt$ — энергия элемента сигнала. Здесь учтено условие ортогональности сигналов $s_j(t)$ и $\hat{s}_i(t)$ на интервале $(0, T)$.

Усредняя $w(z/s_i)$ по θ, при $w(\theta)=\frac{1}{2\pi}$ $(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$ получаем функционал правдоподобия при неопределенной фазе сигнала

$$w(z/s_i) = K_1 \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma^2 E_i\right) I_0\left(\frac{2\gamma}{G_{ш}} Y_i\right),$$

где $V_i=\sqrt{[\int\limits_0^T z(t)s_i(t)dt]^2+[\int\limits_0^T z(t)\hat{s}_i(t)dt]^2}$.

P.2.1.14. Функционал правдоподобия согласно Р.2.1.13 при фиксированных значениях $x=\gamma\cos\theta$ и $y=\gamma\sin\theta$ можно записать

$$w(z/s_i) = K_1 \exp\left\{\frac{2}{G_{ш}}\left[xY_i + y\hat{Y}_i - \frac{1}{2}(x^2+y^2)E_i\right]\right\}.$$

Усреднив $w(z/s_i)$ по x и y, полагая

$$w_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

и используя табличный интеграл [6] $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-px^2-bx)dx=\sqrt{\frac{\pi}{p}}\exp\left(\frac{b^2}{4p}\right)$, получим [11]

$$w(z/s_i) = \frac{K_1}{1+2h_i^2}\exp\left\{\frac{2\sigma^2}{G_{ш}^2(1+2h_i^2)}\left[V_i^2 + Y_i\frac{m_x G_{ш}}{\sigma^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \hat{Y}_i\frac{m_y G_{ш}}{\sigma^2} - O_i\right]\right\},$$

где

$$h_i^2 = \frac{E_i\sigma^2}{G_{ш}};\ O_i = \frac{E_i\gamma_p^2 G_{ш}}{2\sigma^2}(1+2h_i^2) - \gamma_p^2 E_i;$$

$$\gamma_p^2 = m_x^2 + m_y^2.$$

2.2. Изменения формы сигналов, обусловленные характеристиками непрерывного канала

Верность связи (степень соответствия переданного и принятого сообщения) определяется, главным образом, искажениями сигналов в непрерывной части канала, а также присутствующими в канале аддитивными шумами.

Под искажениями понимают нежелательные изменения формы передаваемых сигналов, которые могут возникнуть как в линейной, так и нелинейной части канала [1].

Сигнал $s'(t)$ в момент времени t на выходе произвольной физически осуществимой линейной системы (канала) можно связать с сигналом на его входе $s(t)$ интегралом Дюамеля

$$s'(t) = \int_0^\infty g(t, \tau)\, s(t-\tau)\, d\tau, \tag{2.6}$$

где $g(t, \tau)$ — импульсная переходная характеристика системы или реакция системы в момент времени t на дельта-импульс, поданный на вход в момент времени $t-\tau$.

Протяженность переходного процесса $g(t, \tau)$ по переменной τ называют интервалом рассеяния во времени (или памятью) линейного канала. Обозначим его через $\tau_\text{р}$.

По методу равновеликого прямоугольника интервал рассеяния во времени определяется соотношением

$$\tau_\text{р} = \frac{\int_0^\infty |g(t, \tau)|\, d\tau}{|g(t, \tau)|_\text{макс}}. \tag{2.7}$$

Зависимость $g(t, \tau)$ от аргумента t свидетельствует о том, что параметры канала меняются во времени, что приводит к расширению спектра сигнала выхода $s'(t)$ по сравнению со спектром входного сигнала. Это расширение спектра (интервал рассеяния канала по частоте $F_\text{р}$) можно найти, если определить преобразование Фурье от $s'(t)$ или от $g(t, \tau)$ (по переменной t, считая τ параметром), а затем и ширину (например, методом равновеликого прямоугольника) квадрата амплитудного спектра (спектра мощности).

Коэффициент рассеяния

$$k_\text{р} = \tau_\text{р} F_\text{р} \tag{2.8}$$

---

[1] Следует заметить, что термин «искажения» относится к изменению формы сигнала в тех звеньях канала, которые по своему назначению не должны этого делать. Вместе с тем следует иметь в виду, что ряд устройств (звеньев) канала связи выполняет целевые преобразования входных сигналов, немыслимые без изменения их формы (например, модуляция, демодуляция, интегрирование, дифференцирование и др.).

является важной инженерной характеристикой любого канала связи.

Вместо системной характеристики линейной системы $g(t, \tau)$ часто пользуются характеристикой $\mathbf{k}(f, t) = \gamma(f, t)\exp[i\varphi(f, t)]$, называемой передаточной функцией системы.

Характеристики $g(t, \tau)$ и $\mathbf{k}(f, t)$ связаны парой преобразований Фурье:

$$\mathbf{k}(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau; \tag{2.9}$$

$$g(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{k}(f, t)\, e^{i\omega\tau}\, df. \tag{2.10}$$

В нелинейных звеньях (или системах) канала связи выходной сигнал в момент времени t часто можно связать с входным сигналом $s(t)$ в тот же момент времени некоторой заранее известной (но не всегда взаимооднозначной) зависимостью (амплитудной характеристикой)

$$s'(t) = \varphi[s(t)]. \tag{2.11}$$

Такие нелинейные системы (звенья) называют неинерционными.

Задачи

2.2.1. Показать, что если параметры линейного канала не меняются во времени (канал стационарен), его системные характеристики удовлетворяют условиям:

$$g(t, \tau) = g(\tau); \ \mathbf{k}(f, t) = \mathbf{k}(f).$$

2.2.2. Если сигналы выхода и входа канала связаны соотношением $s'(t) = \gamma s(t - \tau_c)$, где γ, τ_c — известный коэффициент передачи и запаздывание в канале, то говорят, что отсутствуют искажения формы сигнала. Показать, что в линейном канале искажения сигнала отсутствуют, если системные характеристики канала удовлетворяют условиям:

$$g(t, \tau) = \gamma\delta(t - \tau_c); \ \mathbf{k}(f, t) = \gamma e^{-i\omega\tau_c},$$

т. е. импульсная переходная характеристика имеет вид дельта-импульса ($\tau_p = 0$), амплитудно-частотная характеристика $\gamma(f)$ не зависит от частоты, а фазо-частотная характеристика $\varphi(t)$ меняется линейно с частотой.

2.2.3. Пусть некоторый линейный канал с постоянными параметрами моделируется электрической схемой (четырехполюсником) рис. 2.2.

Определить интервал временно́го рассеяния (память) такого канала по методу равновеликого прямоугольника, если $R=100$ Ом и $C=100$ мкФ.

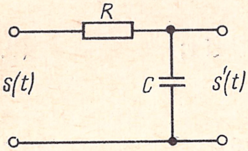


Рис. 2.2. Модель линейного канала с постоянными параметрами

2.2.4. Пусть передаточная функция некоторого линейного канала не зависит от частоты $\mathbf{k}(f,\ t)=\gamma(t)$.

Показать, что в таком канале импульсная переходная характеристика $g(t,\ \tau)=\gamma(t)\delta(\tau)$, а сигнал выхода $s'(t)$ связан с сигналом входа соотношением $s'(t)=\gamma(t)s(t)$, т. е. канал представляет собой безынерционный умножитель.

2.2.5. Для модели канала из предыдущей задачи найти интервал рассеяния по частоте, полагая, что $\gamma(t)=\exp(-\alpha t^2)$.

2.2.6. Пусть некоторый линейный канал описывается импульсной переходной характеристикой

$$g(t,\ \tau)=e^{-\alpha_1\tau}e^{-\alpha_2 t},\ \tau\geqslant 0,\ t\geqslant 0,\ \alpha_1>0,\ \alpha_2>0.$$

Показать, что коэффициент рассеяния такого канала $k_p=\alpha_2/4\alpha_1$.

2.2.7. Показать, что отклик линейного канала с переменными параметрами на гармонический сигнал $s(t)=U_m\cos(\omega t+\varphi_0)$ определяется формулой

$$s'(t)=\gamma(f,\ t)\cos\varphi(f,\ t)\,s(t)-\gamma(f,\ t)\sin\varphi(f,\ t)\,\hat{s}(t)=$$

$$=x(f,\ t)\,s(t)-y(f,\ t)\,\hat{s}(t),$$

где $\gamma(f,\ t)$, $\varphi(f,\ t)$ — соответственно модуль и аргумент передаточной функции $\mathbf{K}(f,\ t)$, а $x(f,\ t)=\gamma(f,\ t)\times\cos\varphi(f,\ t)$ и $y(f,\ t)=\gamma(f,\ t)\sin\varphi(f,\ t)$ — его квадратурные компоненты.

2.2.8. По линейному каналу с передаточной функцией $\mathbf{K}(f,\ t)=\gamma(f,\ t)e^{i\varphi(f,t)}$ передается узкополосный сигнал $s(t)=A(t)\cos[\omega t+\theta(t)]$. Показать, что огибающая выходного сигнала $A'(t)=\gamma(f,\ t)A(t)$, а его фаза $\theta'(t)=\theta(t)+\varphi(f,\ t)$, т. е. канал вносит дополнительную модуляцию амплитуды и фазы.

2.2.9. Пусть некоторый линейный канал с переменными параметрами моделируется неискажающей длинной линией с дискретными отводами, создающими запаздывание $\tau_k(t)$ и изменение уровня $\gamma_k(t)$ (модель многопутевого или многолучевого распространения, см. рис. 2.3).

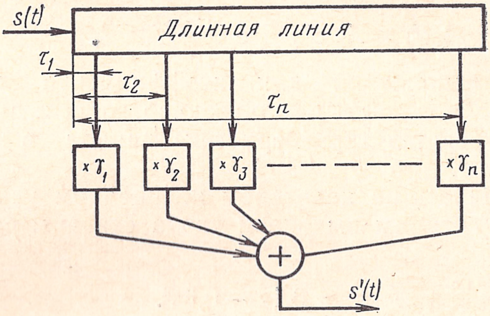


Рис. 2.3. Модель многолучевого канала

Показать, что для этой модели системные характеристики

$$g(t,\ \tau) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(t)\,\delta[t - \tau_k(t)],\ \ \mathrm{k}(f,\ t) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0\tau_k(t)},$$

а выходной сигнал при произвольном входном воздействии $s(t)$ определяется формулой

$$s'(t) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(t)\,s[t - \tau_k(t)].$$

2.2.10. Предположим, что коэффициент передачи линейного канала меняется случайно соответственно по закону Рэлея и односторонне-нормальному закону (см. § 1.2), а надежный прием на фоне шума обеспечивается, если амплитуда сигнала в месте приема превышает пороговое значение $A'_{\text{пор}} = \gamma_{\text{пор}}A = kU_{\text{ш}}$, где $k > 1$; $U_{\text{ш}}$—среднеквадратичное значение шума в канале.

Найти надежность связи в рэлеевском и односторонне-нормальном канале как вероятность выполнения неравенства

$$\gamma > \gamma_{\text{пор}} = k\frac{U_{\text{ш}}}{A}.$$

2.2.11. Пусть некоторый линейный канал с постоянными параметрами, предназначенный для передачи сигналов в полосе частот (0, $F_{\text{макс}}$), имеет передаточную функцию

$$\mathrm{k}(f) = A_0\, \mathrm{e}^{-A\omega^2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(a_1\omega + a_2\omega^2)}.$$

Напишите выражения для коэффициента передачи $\mathrm{k}(f)_{\text{кор}}$ линейного четырехполюсника, обеспечивающего полную коррекцию характеристик канала в заданной полосе частот.

2.2.12. Пусть на некотором нелинейном участке канала связи сигналы выхода и входа связаны соотношением

$$s' = 0{,}1s - 0{,}3s^3.$$

Найти максимальный уровень входного воздействия, при котором относительное отклонение выходного сигнала от линейной зависимости не превышает 3%.

2.2.13. Амплитудная характеристика канала удовлетворительно аппроксимируется квадратичной зависимостью

$$s'(t) = as^2(t).$$

Найти амплитудную характеристику корректирующего четырехполюсника.

2.2.14. Показать, что нелинейность амплитудной характеристики в высокочастотном тракте канала на участке *выход модулятора — вход демодулятора* практически не искажает узкополосный сигнал при угловой модуляции, однако вносит существенные искажения при АМ.

Решения и ответы

Р.2.2.1. На рис. 2.4 показано несколько реализаций импульсной переходной характеристики линейного канала с переменными параметрами. Если свойства канала не меняются во времени (канал с постоянными параметрами), то реализации упомянутой характеристики не должны зависеть от параметра t, т. е. $g(t, \tau) = g(\tau)$. Это означает, что реакция канала с постоянными параметрами на δ-импульс зависит лишь от интервала между моментом наблюдения t и моментом подачи сигнала на вход канала $t - \tau$. Если $g(t, \tau) = g(\tau)$, то, как следует из (2.9), передаточная функция канала от времени не зависит.

Р.2.2.2. Подставив $g(t, \tau)$ в (2.6), с учетом фильтрующего свойства δ-функции получим $s'(t)=\gamma s(t-\tau_c)$. Из (2.9) для заданной переходной характеристики получаем передаточную функцию канала $\mathbf{K}(f)=$ $=\gamma \exp(-\mathrm{i}\,2\pi f\tau_c)$.

Р.2.2.3. Передаточная функция заданной модели канала (см. рис. 2.2)

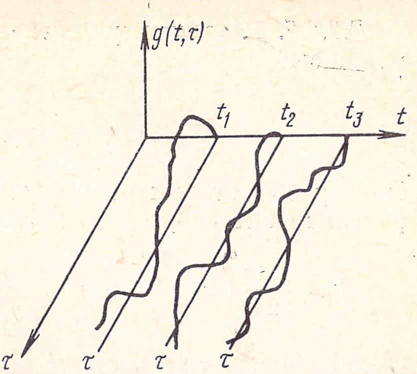


Рис. 2.4. Реализации импульсных переходных характеристик линейного канала со случайно меняющимися параметрами

$$\mathbf{k}(f)=\frac{1}{1+\mathrm{i}\,2\pi fCR}\,.$$

Такой передаточной функции соответствует переходная характеристика $g(t)=\frac{1}{RC}\exp\left(-\frac{\tau}{RC}\right)$, $\tau\geqslant 0$, что вытекает из (2.10).

По методу равновеликого прямоугольника (2.7) находим интервал рассеяния

$$\tau_p=\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau}{RC}\right)d\tau=RC,$$

который в данном случае определяется постоянной времени цепи.

Если $R=100$ Ом и $C=100$ мкф, то $\tau_p=10$ мс.

Р.2.2.4. Подставив $s(t)$ в (2.10), получим

$$g(t,\ \tau)=\gamma(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{i}\,2\pi f\tau)df.$$

Используя известное определение δ-функции [15]

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\omega}\,d\omega,$$

получаем $g(t,\ \tau)=\gamma(t)\delta(\tau)$. Подставив эту величину в интеграл Дюамеля (2.6), получим $s'(t)=\gamma(t)s(t)$.

Р.2.2.5. Заданному сигналу соответствует спектр мощности

$$S^2(f)=\frac{1}{4\pi\alpha}\,e^{-\frac{2\pi^2 f^2}{\alpha^2}}.$$

Пользуясь методом равновеликого прямоугольника, определяем интервал частотного рассеяния

$$F_p=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{2\pi^2 f^2}{\alpha^2}}\,df=\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2}}\int_0^\infty e^{-\frac{\omega^2}{2\alpha^2}}\,d\omega.$$

Отсюда, используя условие нормировки для гауссовского закона распределения, находим

$$F_p=\frac{\alpha}{2\sqrt{2\pi}}.$$

Р.2.2.6. Интервал рассеяния во времени

$$\tau_p=\int_0^\infty e^{-\alpha_1\tau}\,d\tau=\frac{1}{\alpha_1}.$$

Функции $e^{-\alpha_2 t}$ соответствует квадрат модуля амплитудного спектра по Фурье (спектр мощности)

$$S^2(f)=\frac{1}{\alpha_2^2+(2\pi f)^2}.$$

Интервал частотного рассеяния

$$F_p=\int_0^\infty\frac{df}{1+\left(\frac{2\pi f}{\alpha_2}\right)^2}.$$

После интегрирования по [6] следует результат $F_p=\alpha_2/4$. Коэффициент рассеяния канала $k_p=\tau_p F_p=\alpha_2/4\alpha_1$.

Р.2.2.7. Запишем входной сигнал в комплексном виде $s(t)=\mathbf{U}_m e^{i\omega t}$, где $\mathbf{U}_m=U_m e^{i\varphi_0}$.

Выходной сигнал согласно (2.6) и (2.9)

$$s'(t)=\mathbf{U}_m e^{i\omega t}\int_0^\infty g(t,\tau)\,d\tau=U_m\gamma(f,t)\cos[\omega t+$$

$$+\varphi_0+\varphi(f,t)]+iU_m\gamma(f,t)\sin[\omega t+\varphi_0+\varphi(f,t)].$$

Действительный сигнал на выходе канала определяется вещественной частью полученного выражения: $s'(t)=U_m\gamma(f,\ t)\cos[\omega t+\varphi_0+\varphi(f,\ t)]$. После элементарных преобразований определяем

$$s'(t)=\gamma\cos\varphi\, U_m\cos(\omega t+\varphi_0)-\gamma\sin\varphi\, U_m\sin(\omega t+\varphi_0)=$$

$$=\gamma\cos\varphi\, s(t)-\gamma\sin\varphi\,\hat{s}(t)=xs(t)-y\hat{s}(t),$$

что и требовалось доказать.

Р.2.2.8. Полученные в Р.2.2.7 соотношения для $s'(t)$ справедливы при прохождении через канал произвольного узкополосного сигнала, для которого параметры $x(f,\ t)$, $y(f,\ t)$ можно считать не зависящими от частоты.

Заменив в соотношении для $s'(t)$ U_m огибающей $A(t)$, а φ_0—фазой $\theta(t)$, получим $A'(t)=\gamma A(t)$, $\theta'(t)=$ $=\theta(t)+\varphi$.

Р.2.2.9. Результат для $g(t,\ \tau)$ следует из структуры многолучевой модели (см. рис. 2.3).

Осуществив преобразование Фурье над заданной переходной характеристикой $g(t,\ \tau)$, с учетом фильтрующего свойства δ-функции получим $\mathbf{k}(f_0t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k(t)\times$ $\times e^{-i\omega\tau_k(t)}$. Подставив выражение для $g(t,\ \tau)$ в (2.6), находим $s'(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k(t)s[t-\tau_k(t)]$.

Р.2.2.10. В рэлеевском канале надежность связи

$$N_{\text{рэл}}=\int\limits_{kU_{\text{ш}}/A}^{\infty} w(\gamma)\,d\gamma=\int\limits_{kU_{\text{ш}}/A}^{\infty}\frac{2\gamma}{\overline{\gamma^2}}\exp\left(-\frac{\gamma^2}{\overline{\gamma^2}}\right)d\gamma=$$

$$=\exp\left(-\frac{k^2U_{\text{ш}}^2}{\overline{\gamma^2}A^2}\right).$$

Обозначим отношение *сигнал/шум* через $h^2=\dfrac{A^2\overline{\gamma^2}}{2U_{\text{ш}}^2}=$ $=\dfrac{P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}}$. Тогда $N_{\text{рэл}}=\exp\left(-\dfrac{k^2}{2h^2}\right)$.

Для односторонне-нормального канала

$$N_{\text{о.н}}=\frac{2}{\sqrt{2\pi\overline{\gamma^2}}}\int\limits_{kU_{\text{ш}}/A}^{\infty}\exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\overline{\gamma^2}}\right)d\gamma=1-\Phi\left(\frac{k}{h\sqrt{2}}\right).$$

Если, например, положить $k=2$ и $h^2=10$, то

$$N_{\text{рэл}}=e^{-0,2}=0,82;\quad N_{\text{о.н}}=1-\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{20}}\right)=0,65.$$

Р.2.2.11. Исходя из условия $\mathbf{k}(f)\mathbf{k}(f)_{\text{кор}} = B_0 \times \exp(-\mathrm{i}2\pi f b)$, $0 \leqslant f \leqslant F_{\text{макс}}$, получаем

$$\mathbf{k}(f)_{\text{кор}} = \frac{B_0}{A_0} \exp(2\pi f A) \exp[\mathrm{i}(a_2 4\pi^2 f^2 + (a_1 - b)2\pi f].$$

Р.2.2.12. Очевидно, что максимальный уровень входного воздействия удовлетворяет уравнению

$$\frac{|s'(s_{\text{макс}}) - 0{,}1 s_{\text{макс}}|}{|0{,}1 s_{\text{макс}}|} = \frac{0{,}3|s_{\text{макс}}|^3}{0{,}1|s_{\text{макс}}|} = 3|s_{\text{макс}}|^2 = 0{,}03.$$

Отсюда $|s_{\text{макс}}| = 0{,}1$ В.

Р.2.2.13. Если амплитудная характеристика канала $s' = \varphi(s)$ задана, то амплитудная характеристика корректирующего четырехполюсника должна удовлетворять условию $s' = \varphi^{-1}(s)$, т. е. она должна быть обратной. Квадратичную характеристику корректирует нелинейность вида $s'(t) = b\sqrt{s(t)}$.

Р.2.2.14. Представим модулированный сигнал в виде $s(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$, а амплитудную характеристику будем аппроксимировать полиномом n-й степени $s' = a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n$.

Подставляя сюда выражение $s(t)$ и используя формулы кратных дуг, получаем

$$s(t) = \left[a_2 \frac{A^2(t)}{2} + \cdots\right] + \left[a_1 A(t) + \frac{3}{4} a_3 A^3(t) + \cdots\right] \times$$
$$\times \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] + \left[a_2 \frac{A^2(t)}{2} + \cdots\right] \cos[2\omega_0 t + 2\varphi(t)] + \ldots.$$

Нелинейность амплитудной характеристики канала вызывает появление гармоник несущей частоты, изменение закона огибающей первой гармоники и углубление модуляции фазы (частоты) на высших гармониках.

Поскольку высшие гармоники могут быть эффективно отфильтрованы, то анализировать следует сигнал

$$s'(t) = \left[a_1 A(t) + \frac{3}{4} a_3 A^3(t) + \cdots\right] \cos[\omega_0 t + \varphi(t)].$$

Отсюда видно, что при угловой модуляции, когда $A(t) = \mathrm{const}$ (и возможно ограничение амплитуды), нелинейность амплитудной характеристики практически не искажает сигнал, при амплитудной же модуляции наблюдаются искажения.

2.3. Аддитивные помехи в непрерывном канале связи

Аддитивные помехи в канале связи вызываются весьма разными причинами и могут принимать самые различные формы. Тем не менее по их электрической и статистической структурам такие помехи чаще всего разделяют на три основных класса:

1) флуктуационные или гладкие (распределение по частоте и времени);

2) сосредоточенные по частоте (гармонические);

3) сосредоточенные во времени (импульсные).

Флуктуационная помеха — это непрерывный во времени случайный процесс (чаще всего его полагают стационарным и эргодическим) с нормальным распределением мгновенных значений и нулевым средним. Энергетический спектр $G_ш$ такой помехи в пределах анализируемой полосы частоты $F_э$ полагают равномерным (помеха типа «белого шума»).

Плотность вероятности отрезка флуктуационной помехи длительности T

$$w\left(u_T\right) = K \exp\left[-\frac{1}{G_ш}\int_0^T u^2(t)dt\right], \qquad (2.12)$$

где K — постоянная, определяемая из условия нормировки (см. сноску на стр. 61).

Гармоническая (сосредоточенная по спектру) помеха — это аддитивная помеха, энергетический спектр которой сосредоточен в сравнительно узкой полосе частот, сопоставимой или даже существенно более узкой, чем полоса частот сигнала.

Сосредоточенные помехи полагают равномерно распределенными в полосе частот, т. е. вероятность $p_{с.п}$ появления сосредоточенной помехи в полосе F пропорциональна этой полосе и зависит от среднего числа сосредоточенных помех $\nu_{с.п}$, превышающих пороговый уровень сигнала $P_{пор}$[1], в единице полосы.

Импульсная помеха — аддитивная помеха, представляющая собой последовательность импульсов, возбуждаемых кратковременными ЭДС апериодического или колебательного характера.

Моменты появления импульсной помехи полагают равномерно распределенными во времени. Это означает, что вероятность появления импульсной помехи $p_{и.п}$ в течение интервала T пропорциональна длительности интервала, а также среднему числу импульсных помех в единицу времени $\nu_{и.п}$, зависящему от допустимого порогового уровня помехи.

Очень часто приемное устройство (а нередко и систему связи в целом) строят оптимальным (или близким к оптимальному) по отношению к неизбежной в канале флуктуационной помехе, а в качестве радикального средства борьбы с сосредоточенной и импульсной помехами используют такое построение приемных устройств, при котором уменьшаются вероятности $p_{с.п}$ и $p_{и.п}$ попадания сосредоточенной и импульсной помех на решающую схему приемного устройства. Такая задача успешно решается при помощи различных методов разнесенного приема, т. е. приема информации по параллельным независимым каналам.

---

[1] Поровый уровень средней мощности сигнала $P_{пор}$ различен для разных систем связи и определяется так, что при превышении помехой этого порога качество связи резко ухудшается.

Задачи

2.3.1. Показать, что плотность вероятности реализации нормального флуктуационного шума с энергией $E_ш$ и спектральной плотностью мощности $G_ш$ больше плотности вероятности реализации шума, имеющей нулевую энергию в $\exp(-E_ш/G_ш)$ раз.

2.3.2. Найти отношение сигнал/шум $P_с/P_ш$ в полосе сигнала, полагая, что сигнал — узкополосный процесс со средним квадратом огибающей $\overline{A^2}$, а флуктуационный шум порожден тепловым движением электронов при абсолютной температуре проводника T.

2.3.3. Узкополосный сигнал со средней мощностью $P_с = 100$ мкВт принимается на фоне нормального стационарного шума, который в полосе сигнала $(f_0 - \Delta f) \div (f_0 + \Delta f)$, $\Delta f = 5$ кГц имеет равномерный энергетический спектр $G_ш = 10^{-8}$ Вт/Гц. Найти вероятность появления флуктуационной помехи $p_{ф.п}$, средняя мощность которой превышает пороговый уровень $P_{пор} = 4P_с$.

2.3.4. Найти отношение *сигнал/шум,* полагая, что сигнал такой же, как в предыдущей задаче, а стационарный шум имеет энергетический спектр $G(f) = A\exp[-B(f - f_0)^2]$, $B = \left(\frac{1{,}65}{\Delta f}\right)^2 c^2$, $A = \frac{7\cdot 10^{-9}}{\sqrt{2\pi}}$ Вт/Гц.

2.3.5. При каком соотношении между пороговым уровнем $P_{пор}$ и полосой анализа сигнала F вероятность появления сосредоточенной помехи, превышающей порог, остается неизменной.

2.3.6. Некоторый источник выдает двоичные информационные посылки со скоростью I' посылок/с. Посредством ФМ или ЧМ по одному и тому же каналу связи с полосой $F_к$ эта информация может передаваться двояким путем:

а) посредством параллельного модема: информация передается параллельно на n независимых частотных поднесущих, причем каждая из них обеспечивает скорость передачи I'/n;

б) посредством последовательного модема: информация передается короткими посылками длительностью $T = 1/I'$ на одной несущей (одноканальный вариант передачи).

Вероятность попадания сосредоточенной помехи со средней мощностью $P_{\text{с.п}}$ в полосу канала связи близка к 1, в то время как вероятность попадания двух или более таких помех очень мала. Показать, что последовательный модем при той же средней мощности передатчика ($P_{\text{пер}}=\text{const}$) и эффективности использования полосы ($\nu=I'/F_{\text{к}}=\text{const}$) обеспечивает в указанном канале бо́льшую верность, если $P_{\text{пер}}/P_{\text{с.п}}<1$.

2.3.7. Пусть равновероятные символы двоичного источника А и Б для повышения качества передаются с помощью $N=2k+1$ независимых частотных каналов (частоторазнесенная система связи ЧРСС), причем при передаче символа А в каждом канале передается «1», а при передаче символа Б в каждом канале передается «0». Вероятность попадания сосредоточенной помехи в одну ветвь разнесения $p_{\text{с.п}}=10^{-1}$.

В месте приема символы А и Б регистрируются на основе мажоритарного декодирования: если в большинстве частотных каналов зарегистрированы «1», принимается решение в пользу символа А, если же в большинстве каналов зарегистрированы «0», принимается решение в пользу Б. Найти вероятность правильного декодирования q, если число $N=5$.

2.3.8. Пусть прием информации в ЧРСС предыдущей задачи ведется только по $n\leqslant N$ ветвям, свободным на данном интервале времени от сосредоточенной помехи, причем до принятия решения в пользу символов А или Б сигналы отдельных ветвей складываются так, что вероятность ошибочного приема символа равна p_n. Примем, что, когда все ветви разнесения окажутся «забитыми» сосредоточенной помехой, прекращается передача информации по команде, переданной по каналу обратной связи.

Определить: вероятность перерывов в передаче информации по каналу; вероятность передачи информации по линии; среднюю вероятность ошибочного приема символа.

2.3.9. Пусть отрезок гармонического сигнала длительностью T и с амплитудой U_m вместе с импульсной помехой после входного блока с полосой Δf подвергается двустороннему ограничению по напряжению с уровнем U_0. Примем, что импульсная помеха не нарушает качества связи, если ее энергия на входе решающего блока в 10 раз меньше энергии полезного сигнала:

$E_{\text{и.п}} < 0{,}1\,E_{\text{с}}$. Показать, что при $U_0 = U_m$ качество связи не нарушается, если $\Delta f > 10/T$.

2.3.10. Для борьбы с импульсной помехой при передаче двоичных равновероятных символов источника «1» и «0» использовано их $2k+1$-кратное повторение (избыточное кодирование), а в месте приема — мажоритарное декодирование. Полагая, что импульсные помехи попадают независимо в отдельные тактовые интервалы с вероятностью $p_{\text{и.п}} = 0{,}01$, вызывая при этом ошибочный переход, определить вероятность ошибочного приема символа при числе ветвей разнесения $N = 3$. Определить, во сколько раз уменьшилась эта вероятность по сравнению с примитивным (безызбыточным) кодированием.

2.3.11. Найти вероятность появления импульсной помехи $p_{\text{и.п}}$, вызывающей ошибку в передаче сигнала $E_{\text{и.п}} > 0{,}1 E_{\text{с}}$ (см. 2.3.9), если нет ограничения. Амплитуда сигнала $U_m = 1$ В, $\tau_{\text{и}} = 0{,}1\,T$, а амплитуда импульсной помехи $U_{\text{и}}$ имеет логарифмически-нормальное распределение

$$w(U)_{\text{и}} = \frac{1}{u_{\text{и}}\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(\ln U_{\text{и}} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right],$$

где μ, σ^2 — параметры распределения, определяемые соотношениями:

$$\overline{U}_{\text{и}} = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right); \quad \sqrt{\overline{U^2_{\text{и}}}} = \exp(\mu + \sigma^2).$$

Считать, что $\overline{U}_{\text{и}} = 10$ В; $\sqrt{\overline{U^2}_{\text{и}}} = 12$ В.

Решения и ответы

Р.2.3.1. Согласно (2.12) плотность вероятности реализации отрезка флуктуационного шума с энергией $E_{\text{ш}}$ можно представить так: $w_1(u_T) = K\exp\left(-\frac{E_{\text{ш}}}{G_{\text{ш}}}\right)$. Если $E_{\text{ш}} = 0$, то $w_1(u_T) = K$. Отношение этих величин определяет искомый результат.

Р.2.3.2. Средняя мощность теплового шума $P_{\text{ш}} = 4kTF_{\text{с}}$, где $k = 1{,}37\cdot 10^{-23}$ Дж/град — постоянная Больцмана. Следовательно, $\frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}} = \frac{1}{2}\,\frac{\overline{A^2}}{4kTF_{\text{с}}}$, так как $P_{\text{с}} = \overline{A^2}/2$.

Р.2.3.3. Искомая вероятность $p_{\text{ф.п}}$ определяется вероятностью выполнения неравенства $A_{\text{ш}} > A_{\text{пор}} = \sqrt{4P_{\text{с}}}$. Огибающая шума $A_{\text{ш}}$ имеет распределение Рэлея

$$w_1(A_{\text{ш}}) = \frac{A_{\text{ш}}}{P_{\text{ш}}} \exp\left(-\frac{A_{\text{ш}}^2}{2P_{\text{ш}}}\right), \quad P_{\text{ш}} = 2G_{\text{ш}}\,\Delta f.$$

Таким образом,

$$p_{\text{ф.п}} = \int\limits_{\sqrt{4P_{\text{с}}}}^{\infty} w_1(A_{\text{ш}})\,dA_{\text{ш}} = \exp\left(-\frac{P_{\text{с}}}{G_{\text{ш}}\,\Delta f}\right) = 0{,}135.$$

Р.2.3.4. Средняя мощность шума

$$P_{\text{ш}} = \int\limits_{f_0-\Delta f}^{f_0+\Delta f} G(f)\,df = A\int\limits_{-\Delta f}^{\Delta f} \exp\left(-\frac{B}{2}x^2\right)dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{B}}\,A\Phi(\Delta f\sqrt{B}) = 20 \text{ мкВт}.$$

Отношение сигнал/шум равно 5 (приблизительно 7 дБ).

Р.2.3.5. $p_{\text{с.п}} = k\nu_{\text{с.п}}F$, где k — коэффициент пропорциональности. Если среднее число сосредоточенных помех $\nu_{\text{с.п}}$ в единичной полосе пропорционально $P_{\text{пор}}$, то вероятность появления сосредоточенной помехи $p_{\text{с.п}}$, превышающей пороговый уровень, остается неизменной, когда величина $P_{\text{пор}}$ обратно пропорциональна полосе F.

Р.2.3.6. Средняя вероятность ошибки параллельного модема

$$p_{\text{пар}} = \sum_{k=1}^{n} p_k,$$

где p_k — вероятность ошибки в каждом частотном канале. Средняя же вероятность ошибки последовательного модема определяется вероятностью ошибки элемента сигнала $p_{\text{посл}} = p_0$. Вероятность ошибки p_k и p_0 определяется отношением сигнал/сосредоточенная помеха в обоих модемах.

Для параллельного модема отношение сигнал/помеха в каждом частотном канале $(P_{\text{с}}/P_{\text{с.п}})_{\text{пар}} = P_{\text{пер}}/nP_{\text{с.п}}$, в то время как $(P_{\text{с}}/P_{\text{с.п}})_{\text{посл}} = P_{\text{пер}}/P_{\text{с.п}}$. Попав в полосу k-го индивидуального канала параллельного модема при $(P_{\text{с}}/P_{\text{с.п}})_{\text{пар}} < 1$, помеха обусловливает в этом канале величину $p_k \approx 1/2$ и, следовательно, $p_{\text{пар}} \approx 0{,}5$, если даже по остальным частотным каналам вероятность ошибки близка к нулю. В последовательном же модеме помеха той же интенсивности обеспечивает величину $(P_c/P_{с.п})_{посл}=n(P_c/P_{с.п})_{пар}$, которая при больших n может оказаться явно недостаточной для существенного понижения верности связи.

Р.2.3.7. Вероятность ошибки $p_0=1-q=\sum_{i=k+1}^{N} P(i)$, где $P(i)$ — вероятность того, что помеха попадает в i из N каналов. С учетом биномиальной формулы (см. задачу 2.1.3)

$$q=1-\sum_{i=k+1}^{N} C_N^i p_{с.п}^i (1-p_{с.п})^{N-i}.$$

Если $N=2k+1=5$, то $k=2$ и

$$q=1-[C_5^3 p_{с.п}^3 (1-p_{с.п})^2+C_5^4 p_{с.п}^4 (1-p_{с.п})+C_5^5 p_{с.п}^5].$$

При $p_{с.п}=0{,}1$ $q=8{,}46\cdot 10^{-3}$.

Р.2.3.8. Согласно биномиальной формуле вероятность перерывов $p_{пер}=P(N)=p^N{}_{с.п}$. Вероятность наличия связи $p_{св}=1-p^N{}_{с.п}$. Вероятность того, что при наличии связи прием ведется по $n\leqslant N$ ветвям,

$$P(n)=\frac{C_N^n p_{с.п}^{N-n} (1-p_{с.п})^n}{1-p_{с.п}^N}.$$

В этом выражении числитель определяет совместную вероятность наличия связи и осуществления приема по n не забитым помехой ветвям, а знаменатель определяет безусловную вероятность связи. Средняя вероятность ошибочного приема символа в рассматриваемой ЧРСС

$$p_{ош}=\sum_{n=1}^{N} P(n)\,p_n.$$

Р.2.3.9. Длительность импульсной помехи на входе (также и выходе) ограничителя $\tau_и$ примерно обратно пропорциональна полосе пропускания входного блока, т. е. энергия импульсной помехи после ограничения $E_{и.п}=U^2{}_0/\Delta f$. С другой стороны, $E_c=\frac{U_m^2 T}{2}$. При $U_m=U_0$ имеем $\Delta f>10/T$.

Р.2.3.10. Воспользовавшись формулой для вероятности правильного приема из Р.2.3.7, при $p_{и.п}\ll 1$ и $N=3$ имеем

$$p_{\text{ош}} = 1 - q = C_3^2 p_{\text{и.п}}^2 + C_3^3 p_{\text{и.п}}^3 = 3p_{\text{и.п}}^2 + p_{\text{и.п}}^3 \approx 3p_{\text{и.п}}^2.$$

При примитивном кодировании $p_{\text{ош}} = p_{\text{и.п}}$. Избыточное кодирование уменьшит вероятность ошибки в

$$p_{\text{и.п}} / 3p_{\text{и.п}}^2 = 1/3p_{\text{и.п}} \approx 33 \text{ раза}.$$

Р.2.3.11. Неравенство $E_{\text{и.п}} > 0{,}1E_{\text{с}}$ можно записать так:

$$U_{\text{и}}^2 \tau_{\text{и}} > 0{,}05 U_m^2 T,$$

или $g = \ln U_{\text{и}} > \ln \left(U_m \sqrt{0{,}05 \frac{T}{\tau_{\text{и}}}}\right) = g_{\text{пор}}$.

Если $U_{\text{и}}$ имеет логарифмически-нормальное распределение, то g имеет нормальное распределение [11] с параметрами $\bar{g} = \mu$; $\overline{(g - \bar{g})^2} = \sigma^2$. Вероятность выполнения неравенства $g > g_{\text{пор}}$

$$p_{\text{и.п}} = \int_{g_{\text{пор}}}^{\infty} w(g)\, dg = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi\left(\frac{g_{\text{пор}} - \mu}{\sigma}\right)\right].$$

Легко заметить, что

$$\frac{\sqrt{\overline{U_{\text{и}}^2}}}{\bar{U}_{\text{и}}} = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right), \text{ или } \sigma = \sqrt{2 \ln \frac{\sqrt{\overline{U_{\text{и}}^2}}}{\bar{U}_{\text{и}}}} = 0{,}603;$$

$\mu = \ln \bar{U}_{\text{и}} - \ln \frac{\sqrt{\overline{U_{\text{и}}^2}}}{\bar{U}_{\text{и}}} = 2{,}16$. Поэтому $p_{\text{и.п}} = \frac{1}{2} [1 - \Phi(2{,}94)] = 1{,}64 \cdot 10^{-3}$.

2.4. Прохождение случайных воздействий через канал связи и его звенья

Исследование преобразований случайных процессов при их прохождении через линейные динамические системы (как с регулярными, так и случайно меняющимися параметрами) связано с решением задач двух типов:

1) по данной корреляционной функции (энергетическому спектру) входного воздействия $X(t)$ найти корреляционную функцию (энергетический спектр) отклика $Y(t)$ динамической системы, заданной ее характеристиками;

2) зная многомерные распределения входного воздействия $X(t)$, найти многомерные распределения отклика $Y(t)$ заданной динамической системы.

Вторая задача является более общей. Однако ее решение более сложно. Поэтому здесь для линейных систем общего вида ограничимся лишь решением первой задачи. Что касается прохождения случайных воздействий через нелинейные системы, то, рассматривая решение задач двух указанных выше типов, ограничимся классом безынерционных детерминированных нелинейных систем.

1. Прохождение случайных процессов через линейные системы. Исчерпывающей характеристикой линейной системы в общем виде (со случайно меняющимися параметрами) является случайная импульсная переходная характеристика $G(t, \tau)$. С ней связана случайная комплексная передаточная функция

$$\mathbf{K}(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau. \qquad (2.13)$$

Зная $\mathbf{K}(f, t)$, обратным преобразованием Фурье получаем $G(t, \tau)$:

$$G(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}(f, t)\, e^{i\,\omega\tau}\, df. \qquad (2.14)$$

Отклик системы на воздействие $X(t)$ определяется интегралом Дюамеля (с учетом физической осуществимости)

$$Y(t) = \int_{0}^{\infty} G(t, \tau)\, X(t-\tau)\, d\tau. \qquad (2.15)$$

Корреляционная функция отклика $Y(t)$ линейной системы со случайной характеристикой $\mathbf{K}(f, t)$ на стационарное воздействие $X(t)$ может быть найдена как

$$B_y(t, t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{\text{к}}(f, t, \tau)\, G_x(f)\, e^{i\,\omega\tau} df. \qquad (2.16)$$

Здесь $B_{\text{к}}(f, t, \tau) = \overline{\mathbf{K}(-f, t)\,\mathbf{K}(f, t+\tau)}$ — корреляционная функция канала в общем случае со случайно меняющимися параметрами; $G_x(f)$ — энергетический спектр воздействия.

Аналогично (2.16) определяется корреляционная функция отклика и при детерминированном воздействии, если под $G_x(f)$ иметь в виду характеристику

$$G_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{S_m^2(f)}{T}, \qquad (2.17)$$

где $S_m(f)$ — модуль спектральной плотности детерминированной функции.

2. Прохождение случайных процессов через нелинейные системы (с регулярными параметрами). Функции распределения выходного процесса $Y(t)$ той или иной размерности при заданном распределении входного процесса $X(t)$ и заданной характеристике преобразования системы $y=\varphi(x)$ могут быть получены известными из теории вероятностей методами нахождения распределений функционально связанных случайных величин [3].

Корреляционную функцию выходного процесса при известном двумерном распределении входного процесса $w_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ можно определить по формуле

$$B_y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_1) - \overline{Y(t_1)}]\,[\varphi(x_2) - \overline{Y(t_2)}]\, w_2(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx_1 dx_2, \qquad (2.18)$$

в то время как для определения математического ожидания выходного продукта достаточно знать одномерную плотность вероятности $w_1(x; t)$

$$m_y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, w_1(x; t)\, dx. \qquad (2.19)$$

Задачи

2.4.1. Показать, что отклик произвольной линейной системы $Y(t)$ на случайное входное воздействие $X(t)$ можно представить суммой четырех независимых слагаемых

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t) + Y_3(t) + Y_4(t),$$

где $Y_1(t)$ — отклик детерминированной системы с характеристикой $g(t, \tau) = \overline{G(t, \tau)}$ или $\mathbf{k}(f, t) = \overline{\mathbf{K}(f, t)}$ на детерминированное воздействие $m_x(t) = \overline{X(t)}$; $Y_2(t)$ — отклик системы с центрированной характеристикой $\overset{\circ}{G}(t, \tau)$ или $\overset{\circ}{\mathbf{K}}(f, t)$ на детерминированное воздействие $m_x(t)$; $Y_3(t)$ — отклик детерминированной системы с характеристикой $g(t, \tau)$ или $\mathbf{k}(f, t)$ на центрированное воздействие $\overset{\circ}{X}(t)$; Y_4 — отклик системы с центрированной характеристикой $\overset{\circ}{G}(t, \tau)$ или $\overset{\circ}{\mathbf{K}}(f, t)$ на центрированное воздействие $\overset{\circ}{X}(t)$.

2.4.2. Показать, что для линейных систем, у которых передаточная функция не зависит от частоты $\mathbf{K}(f, t) = K(t)$ (безынерционные линейные системы), корреляционная функция отклика связана с корреляционной функцией стационарного входного воздействия соотношением

$$B_y(t, t+\tau) = \overline{K(t)\,K(t+\tau)}\, B_x(\tau).$$

2.4.3. Показать, что, если параметры системы не меняются во времени, т. е. $\mathbf{K}(f, t) = \mathbf{K}(f)$, энергетический спектр выхода $G_{\text{Y}}(f)$ связан с энергетическим спектром входа $G_x(f)$ формулой

$$G_y(f) = G_x(f)\,\overline{\mathbf{K}(f)\,\mathbf{K}(-f)} = G_x(f)\,K^2(f).$$

2.4.4. Последовательный колебательный контур с параметрами R, L, C находится под воздействием стационарного белого шума с энергетическим спектром $G_{\text{ш}}$. Найти энергетический спектр и корреляционную функцию напряжения на емкости контура.

2.4.5. На вход канала с рассеянием во времени и по частоте с функцией корреляции

$$B_k(f, \tau) = a \exp\left(-\alpha_1 \frac{|f|}{f_0} - \alpha_2 \frac{|\tau|}{\tau_0}\right)$$

поступает гармонический сигнал с частотой f_0 и случайной амплитудой A.

Найти энергетический спектр и корреляционную функцию выходного процесса.

2.4.6. На вход идеальной длинной линии с линейно меняющейся во времени задержкой поступает стационарный случайный процесс с энергетическим спектром $G(f)$. Найти корреляционную функцию и энергетический спектр выходного процесса.

2.4.7. На вход синхронного детектора (перемножитель, выходной продукт которого подвергается низкочастотной фильтрации) поступает случайный процесс

$$Z(t) = k_{\text{АМ}}\, b(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + X_{\text{п}}(t) \cos \omega_0 t + Y_{\text{п}}(t) \sin \omega_0 t,$$

который представляет собой аддитивную смесь сигнала БАМ и флуктуационного шума[1]. Здесь ω_0 — несущая частота; $b(t)$ — модулирующий сигнал с нулевым средним значением и полосой частот F_{c}; $X_{\text{п}}(t)$ и $Y_{\text{п}}(t)$ — независимые, нормально распределенные квадратурные компоненты шума, у которых

$$m_x = m_y = 0;\ B_x(\tau) = B_y(\tau) = B(\tau) = G_{\text{ш}} F_{\text{c}} \frac{\sin 2\pi F_{\text{c}} \tau}{2\pi F_{\text{c}} \tau}\,.$$

Опорный сигнал $u_{\text{г}}(t) = U_{\text{г}} \cos(\omega_0 t + \varphi_{\text{г}})$. Фильтр низких частот в полосе F_{c} будем считать идеальным с единичным коэффициентом передачи. Определить:

а) одномерное распределение выходного продукта $Y(t)$; его среднее значение $m_y(t)$, дисперсию $\sigma^2_y(t)$;

б) корреляционную функцию и энергетический спектр для флуктуирующей части $Y(t)$;

---

[1] Свойства шума считаются одинаковыми для всех нижеследующих задач этого параграфа.

в) отношение *сигнал/шум* на входе $(P_с/P_ш)_{вх}$ и выходе детектора $(P_с/P_ш)_{вых}$;

г) выигрыш модема $g=(P_с/P_ш)_{вых}/(P_с/P_ш)_{вх}$.

2.4.8. На вход синхронного детектора поступает смесь модулированного по углу сигнала и флуктуационного шума

$$Z(t) = U_m \cos[\omega_0 t + \theta(t) + \varphi_0] + X_п(t)\cos\omega_0 t + Y_п(t)\sin\omega_0 t,$$

где $\theta(t) = \Delta\varphi b(t)$ при ФМ; $\theta(t) = \Delta\omega\int b(t)dt$ при ЧМ.

Определить те же характеристики, что и в задаче 2.4.7, полагая, что при детектировании ЧМ сигнала к синхронному детектору подключается еще идеальная дифференцирующая цепь.

2.4.9. На вход безынерционного нелинейного устройства с характеристикой $y=x^2$ поступает стационарный нормальный шум с корреляционной функцией $B_x(\tau)=\sigma^2_x R_x(\tau)=\sigma^2_x\,\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}$.

Определить: одномерную плотность вероятности выходного продукта $Y(t)$, математическое ожидание $m_y(t)$, корреляционную функцию и энергетический спектр $B_y(t, t+\tau)$, $G_y(f)$.

2.4.10. На вход «линейного» амплитудного детектора с характеристикой

$$u_{вых} = \begin{cases} ku_{вх} & \text{при } u_{вх} \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } u_{вх} < 0 \end{cases}$$

поступает случайный процесс $Z(t)=[U_m(1+mb(t))+X_п(t)]\cos\omega_0 t+Y_п(t)\sin\omega_0 t$, который представляет собой аддитивную смесь сигнала АМ и стационарного нормального шума с равномерным энергетическим спектром $G_ш$ в полосе частот канала $F_к=2F_с$.

Определить при $\widetilde{b(t)}=0$:

а) отношение *сигнал/шум* $(P_с/P_ш)_{вых}$ на выходе идеального ФНЧ, подключенного к линейному детектору;

б) отношение *сигнал/шум* на входе детектора $(P_с/P_ш)_{вх}$;

в) выигрыш модема $g=(P_с/P_ш)_{вых}/(P_с/P_ш)_{вх}$.

Решения и ответы

Р.2.4.1. Произвольный случайный процесс $X(t)$ можно записать как сумму центрированного процесса $\overset{\circ}{X}(t)$ и его математического ожидания $X(t)=\overset{\circ}{X}(t)+m_x(t)$. Аналогично представляются и системные характеристики произвольной линейной системы:

$$G(t, \tau) = \overset{\circ}{G}(t, \tau) + g(t, \tau), \text{ где } g(t, \tau) = \overline{G(t, \tau)};$$

$$\mathbf{K}(f, t) = \overset{\circ}{\mathbf{K}}(f, t) + \mathbf{k}(f, t), \text{ где } \mathbf{k}(f, t) = \overline{\mathbf{K}(f, t)}.$$

С учетом сказанного отклик произвольной линейной системы с характеристикой $G(t, \tau)$ или $\mathbf{K}(f, t)$ на про-

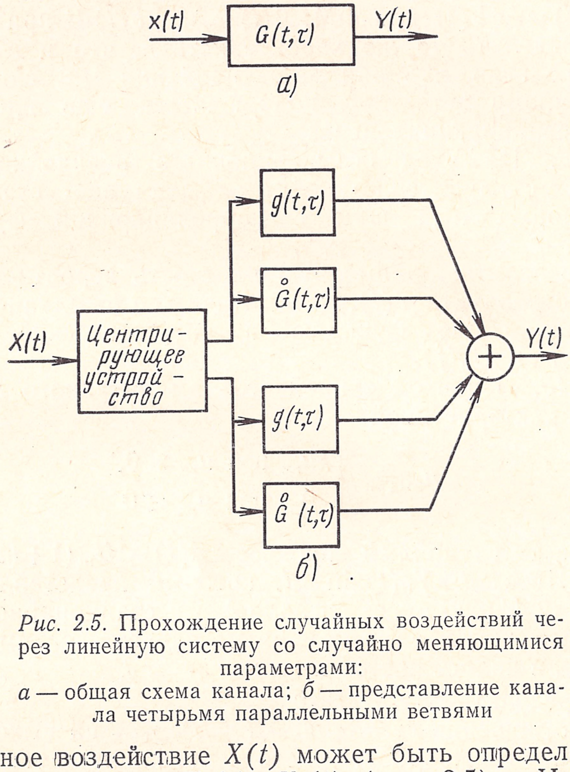


Рис. 2.5. Прохождение случайных воздействий через линейную систему со случайно меняющимися параметрами:
а — общая схема канала; *б* — представление канала четырьмя параллельными ветвями

извольное воздействие $X(t)$ может быть определен суммой $Y_1(t)+Y_2(t)+Y_3(t)+Y_4(t)$ (рис. 2.5). Независимость откликов $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ — $Y_4(t)$ следует из статистической независимости детерминированных и флуктуирующих частей любого случайного процесса, а также из предположения независимости между входным воздействием $X(t)$ и свойствами системы, через которую это воздействие проходит.

Р.2.4.2. Используя (2.16), получаем

$$B_y(t, t+\tau) = \overline{K(t) K(t+\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) \, e^{i\omega\tau} \, df.$$

Интеграл определяет корреляционную функцию входного воздействия. Следовательно,

$$B_y(t,\ t+\tau)=\overline{K(t)\,K(t+\tau)}\,B_x(\tau).$$

Р.2.4.3. С учетом (2.16) имеем

$$B_y(t,\ t+\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{\mathbf{K}(f)\,\mathbf{K}(-f)}\,G_x(f)\,e^{i\omega\tau}\,df.$$

Выражение $\overline{\mathbf{K}(f)\mathbf{K}(-f)}\,G_x(f)=K^2(f)\,G_x(f)$ под знаком интеграла от времени не зависит и определяет энергетический спектр выходного продукта.

Р.2.4.4. Энергетический спектр отклика линейного четырехполюсника с постоянными параметрами связан с энергетическим спектром воздействия следующим соотношением: $G_y(t)=k^2(f)\,G_x(f)$ (Р.2.4.3).

Модуль комплексного коэффициента передачи колебательного контура

$$k(f)=\frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\alpha\omega^2}},$$

где $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$; $\alpha=\dfrac{R}{2L}$.

Энергетический спектр выходного процесса

$$G_y(f)=G_{\text{ш}}\,\frac{\omega_0^4}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\alpha\omega^2}.$$

Совершая переход к корреляционной функции по (1.2), получаем

$$B_y(\tau)=G_{\text{ш}}\,\frac{\omega_0^2}{\alpha}\,e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}\,\tau+\frac{\alpha}{\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}}\times\right.$$

$$\left.\times\sin\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}\,|\tau|\right).$$

Если $Q\gg1$ (т. е. $\omega_0\gg\alpha$), с учетом того, что $\dfrac{\omega_0^2}{\alpha}=\dfrac{2R_{\text{oe}}}{L}$,

$$B_y(\tau)=G_{\text{ш}}\,\frac{2R_{\text{oe}}}{L}\,e^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_0\tau.$$

Р.2.4.5. Усредненный энергетический спектр входного сигнала

$$\overset{*}{G}_x(f) = \frac{\overline{A^2}}{2}\delta(f - f_0).$$

Учитывая, что $B_y(t,\ t+\tau) = B_{\text{к}}(\tau) B_x(\tau)$, получаем

$$B_y(t,\ t+\tau) = a\,\mathrm{e}^{-\alpha_2|\tau|}\,\frac{\overline{A^2}}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{e}^{-\alpha_1|f|}\,\delta(f - f_0)\,df =$$

$$= a\,\mathrm{e}^{-\alpha_1|f_0| - \alpha_2|\tau|}\,\overline{A^2}\cos\omega_0\tau.$$

Р.2.4.6. Коэффициент передачи идеальной длинной линии с линейно меняющейся во времени задержкой

$$\mathbf{K}(f) = a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega k t},$$

где *a, k* — константы. Функция корреляции отклика [ф-ла (2.16)]

$$B_y(t,\ t+\tau) = a^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega k t}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega k(t+\tau)}\,G_x(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\,df =$$

$$= a^2 B_x((1 - k)\tau).$$

Такой корреляционной функции соответствует энергетический спектр

$$G(f) = a^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_x((1 - k)\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,d\tau = \frac{a^2}{1 - k}G_x\left(\frac{f}{1 - k}\right).$$

Отсюда видно, что задержка процесса, пропорциональная времени, приводит к сдвигу средней частоты спектра на величину kf_0 (допплеровскому смещению частоты), к соответствующему расширению (при $1 - k < 1$) или сужению (при $1 - k > 1$) его, а также к изменению интенсивности в $1/(1 - k)$ раз. Впрочем, в системах связи при $|k| \ll 1$ в области достаточно высоких частот f_0 практически во внимание следует брать только допплеровское смещение частоты.

Р.2.4.7. Перемножив $Z(t)$ и $u_{\text{г}}(t)$ и выделив из произведения только низкочастотный продукт, получим

$$Y(t) = \frac{U_{\text{г}} k_{\text{АМ}}}{2} b(t)\cos(\varphi_0 - \varphi_{\text{г}}) + \frac{1}{2}U_{\text{г}} X_{\text{п}}(t)\cos\varphi_{\text{г}} -$$

$$- \frac{1}{2}U_{\text{г}} Y_{\text{п}}\sin\varphi_{\text{г}}.$$

$Y(t)$ имеет нормальное распределение с параметрами:

$$m_y(t) = U_{\text{г}} \frac{k_{\text{АМ}}}{2} b(t) \cos(\varphi_0 - \varphi_{\text{г}}), \ \sigma_y^2(t) = \frac{1}{4} U_{\text{г}}^2 F_{\text{с}} G_{\text{ш}}.$$

Корреляционная функция для флуктуирующей части выходного продукта

$$B_y(\tau) = \frac{1}{4} U_{\text{г}}^2 F_{\text{с}} G_{\text{ш}} \frac{\sin 2\pi F_{\text{с}} \tau}{2\pi F_{\text{с}} \tau},$$

а энергетический спектр равномерен в полосе частот $F_{\text{с}}$ и равен

$$G_y(f) = \frac{1}{4} U_{\text{г}}^2 G_{\text{ш}}.$$

Отношение *сигнал/шум* на выходе синхронного детектора

$$(P_{\text{с}}/P_{\text{ш}})_{\text{вых}} = \frac{\widetilde{m_y^2}(t)}{\sigma_y^2(t)} = \frac{k_{\text{АМ}}^2 \widetilde{b^2(t)} \cos^2(\varphi_0 - \varphi_{\text{г}})}{F_{\text{с}} G_{\text{ш}}}.$$

Отношение *сигнал/шум* на входе детектора в полосе канала $F_{\text{к}} = 2F_{\text{с}}$

$$(P_{\text{с}}/P_{\text{ш}})_{\text{вх}} = \frac{k_{\text{АМ}}^2 \widetilde{b^2(t)}}{2F_{\text{с}} G_{\text{ш}}}.$$

Выигрыш модема

$$g_{\text{БАМ}} = 2\cos^2(\varphi_0 - \varphi_{\text{г}}).$$

При $\varphi_0 = \varphi_{\text{г}}$ величина $g_{\text{БАМ}}$ максимальна и равна 2.

Р.2.4.8. Перемножив $Z(t)$ и $u_{\text{г}}(t)$ и выделив из произведения только низкочастотный продукт, имеем при синхронном детектировании ФМ сигнала

$$Y(t) = \frac{U_m U_{\text{г}}}{2} \cos(\varphi_0 - \varphi_{\text{г}} + \theta(t)) + \frac{1}{2} U_{\text{г}} X_{\text{п}}(t) \cos \varphi_{\text{г}} - \\ - \frac{1}{2} U_{\text{г}} Y_{\text{п}}(t) \sin \varphi_{\text{г}}.$$

$Y(t)$ имеет нормальное распределение с параметрами

$$m_y(t) = \frac{U_m U_{\text{г}}}{2} \cos(\varphi_0 - \varphi_{\text{г}} + \theta(t)), \ \sigma_y^2(t) = \frac{1}{4} U_{\text{г}} F_{\text{с}} G_{\text{ш}}.$$

Корреляционная функция и энергетический спектр флуктуирующей части выходного продукта определяются согласно Р.2.4.7. Если $\varphi_0 - \varphi_{\text{г}} = \pi/2$, $|\theta(t)| \ll \pi$, т. е. модуляция неглубокая, синхронный детектор обеспечивает неискаженное детектирование ФМ сигнала при отсутствии шума, ибо в этом случае

$$m_y(t) = \frac{U_m U_г}{2} \sin\theta(t) \approx \frac{U_m U_г}{2} \Delta\varphi\, b(t).$$

При этом

$$(P_с/P_ш)_{вых} = \frac{U_m^2 \Delta\varphi^2 \widetilde{b^2(t)}}{F_с G_ш}.$$

При заданной форме $Z(t)$ в полосе канального сигнала $F_к$ при угловой модуляции

$$(P_с/P_ш)_{вх} = \frac{U_m^2}{F_к G_ш}.$$

Выигрыш при ФМ и синхронном детектировании

$$g_{ФМ} = \Delta\varphi^2 \widetilde{b^2(t)} \frac{F_к}{F_с} = \beta_{ФМ}^2 \widetilde{b^2(t)} \frac{F_к}{F_с}$$

может значительно превышать 2. Здесь $\beta_{ФМ} = \Delta\varphi$ — индекс фазовой модуляции.

Если $Y(t)$ подать на идеальную дифференцирующую цепь (при детектировании ЧМ сигнала), то выходной продукт при $\varphi_0 - \varphi_г = \pi/2$, $\theta(t) \ll \pi$

$$Y_1(t) = \frac{U_m U_г}{2} \Delta\omega\, b(t) + \frac{1}{2} U_г \cos\varphi_г X'_г(t) + {}$$
$$+ \frac{1}{2} U_г \sin\varphi_г Y'_п(t).$$

Флуктуирующей части $Y_1(t)$ соответствует энергетический спектр

$$G_{y_1}(f) = \frac{1}{4} U_г^2 G_ш \omega^2,$$

так как дифференцирование процесса соответствует умножению энергетического спектра на ω^2. Таким образом, шум на выходе частотного детектора, в отличие от детектора АМ и ФМ, имеет неравномерный энергетический спектр — его интенсивность растет с частотой.

Средняя мощность шума на выходе рассматриваемого частотного детектора

$$P_{ш.вых} = \int_0^{F_с} G_{y_1}(f)\, df = U_г^2 G_ш \pi^2 \int_0^{F_с} f^2 df = \frac{U_г^2}{3} F_с^3 G_ш \pi^2.$$

Отношение

$$(P_с/P_ш)_{вых} = \frac{3U_m^2 \Delta\omega^2 \overline{b^2(t)}}{4F_с^3 G_ш \pi^2}.$$

Выигрыш при ЧМ и синхронном детектировании

$$g_{ЧМ} = \frac{\Delta\omega^2}{4\pi^2 F_с^2} 3\overline{b^2(t)} \frac{F_к}{F_с} = 3\beta_{ЧМ}^2 \overline{b^2(t)} \frac{F_к}{F_с},$$

где $\beta_{ЧМ} = \frac{\Delta\omega}{2\pi F_c}$ — индекс частотной модуляции.

Р.2.4.9. При квадратичном преобразовании случайной величины X каждому значению Y, которое всегда положительно, соответствуют два значения случайной величины X: $X_1 = \sqrt{Y}$, $X_2 = -\sqrt{Y}$. Тогда в соответствии с методикой нахождения распределений функционально связанных случайных величин получаем для одномерного распределения $w_1(y)$ при условии, что известно распределение $w_1(x)$ [15]:

$$w_1(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}(w_1(\sqrt{y}) + w_1(-\sqrt{y})), \ y > 0.$$

При нормальном распределении входной величины

$$w_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}\, 2\sqrt{y}} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma_x^2}\right).$$

Математическое ожидание выходного продукта согласно (2.19)

$$\overline{y} = m_y = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 w_1(x)\, dx = \sigma_x^2.$$

Двумерная плотность вероятности входного процесса [22]

$$w_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1-R^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_x^2(1-R^2)} \times \right.$$

$$\left. \times [x_1^2 + x_2^2 - 2Rx_1x_2]\right\}.$$

Корреляционная функция выходного процесса согласно (2.18)

$$B_y(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x_1^2 - \overline{y})(x_2^2 - \overline{y})\, w_2(x_1 x_2)\, dx_1 dx_2.$$

После несложных преобразований получим

$$B_y(\tau) = 2B_x^2(\tau) = 2\sigma_x^4 R_x^2(\tau) = 2\sigma_x^4\, e^{-2\alpha|\tau|}.$$

Такой корреляционной функции соответствует энергетический спектр

$$G_y(f) = 4\sigma_x^4 \frac{2\alpha}{4\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}.$$

Обратим внимание на то, что хотя отклик и воздействие имеют различные распределения (выходной процесс не является гауссовским), форма корреляционной функции и энергетического спектра флуктуаций на выходе системы такая же, как и на входе.

Р.2.4.10. Огибающая входного процесса

$$R(t) = \sqrt{[U_m(1 + mb(t) + X_{\text{п}}(t)]^2 + Y_{\text{п}}^2(t)}.$$

На выходе неискажающего ФНЧ с граничной частотой $F_{\text{с}} = \frac{F_{\text{к}}}{2}$ продукт «линейного» детектирования $Y_{\text{НЧ}}(t) = k_1 R(t)$, где k_1 — коэффициент пропорциональности; примем далее $k_1 = 1$.

Процесс $Y_{\text{НЧ}}(t)$ имеет обобщенное распределение Рэлея (см. Р.1.2.17) с математическим ожиданием

$$m_{y_{\text{НЧ}}}(t) = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\left(1 + \frac{\alpha_{\text{р}}^2(t)}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\alpha_{\text{р}}^2(t)}{4\sigma^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha_{\text{р}}^2(t)}{2\sigma^2} I_1\left(\frac{\alpha_{\text{р}}^2(t)}{4\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{\alpha_{\text{р}}^2(t)}{4\sigma^2}\right)\right]$$

($\sigma^2 = F_{\text{к}} G_{\text{ш}}$—средняя мощность шума на входе детектора; $\frac{\alpha_{\text{р}}^2(t)}{2} = \frac{U_m^2}{2}[1 + mb(t)]^2$— средняя за период высокой частоты мощность АМ сигнала) и дисперсией

$$\sigma_{y_{\text{НЧ}}}^2(t) = \overline{Y}_{\text{НЧ}}^2 - m_{y_{\text{НЧ}}}^2 = 2\sigma^2 + \alpha_{\text{р}}^2(t) - m_{y_{\text{НЧ}}}^2(t),$$

которую примем за среднюю (за период высокой частоты) мощность выходного шума.

Если величину $m_{y_{\text{НЧ}}}(t)$ усреднить во времени, то получим постоянную составляющую выходного продукта, которая не несет информацию. За полезную (сигнальную) составляющую выходного продукта следует принять сигнал $Y_{\text{с}}(t) = m_{y_{\text{НЧ}}}(t) - \widetilde{m_{y_{\text{НЧ}}}(t)}$.

Для упрощения анализа рассмотрим асимптотическое поведение $m_{y_{\text{НЧ}}}(t)$ для двух крайних случаев: большое отношение *сигнал/шум* на входе $\left((P_{\text{с}}/P_{\text{ш}})_{\text{вх}} = \dfrac{\overline{\alpha_{\text{р}}^2(t)}}{2\sigma^2} \gg 1\right)$ и малое отношение *сигнал/шум* на входе $\left((P_{\text{с}}/P_{\text{ш}})_{\text{вх}} \ll 1\right)$.

В первом случае, воспользовавшись асимптотикой [6]

$$I_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\, e^x \left(1 + \frac{\lambda}{x}\right),\ \lambda = \frac{1}{8} \text{ при } n = 0,$$

$$\lambda = -\frac{3}{8} \text{ при } n = 1,$$

получим:

$$m_{y_{\text{НЧ}}}(t) \approx \alpha_{\text{р}}(t);\ P_{\text{с.вых}} \approx U_m^2 m^2 \overline{b^2(t)};\ P_{\text{ш.вых}} \approx \sigma^2;$$

$$g = \frac{(P_{\text{с}}/P_{\text{ш}})_{\text{вых}}}{(P_{\text{с}}/P_{\text{ш}})_{\text{вх}}} = \frac{2m^2\overline{b^2(t)}}{1 + m^2\overline{b^2(t)}}.$$

Во втором случае, воспользовавшись асимптотикой [27]

$$I_0(x) \approx 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2;\ I_1(x) \approx \frac{x}{2},$$

получим:

$$m_{y_{\text{НЧ}}}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma\left(1 + \frac{\overline{\alpha_{\text{р}}^2(t)}}{2\sigma^2}\right);\ P_{\text{с.вых}} \approx \frac{U_m^4}{2\sigma^2}\, m^2\overline{b^2(t)}\,\pi;$$

$$P_{\text{ш.вых}} \approx 0{,}43\sigma^2;\ g = 3{,}7\,\frac{U_m^2}{\sigma^2}\,\frac{2m^2 b^2(t)}{1 + m^2\overline{b^2(t)}}.$$

Обратим внимание на то, что в рассматриваемой нелинейной схеме (линейном детекторе) имеет место подавление более сильной компонентой входа более слабой компоненты. Это сказывается, в частности, в том, что параметр g при $(P_{\text{с}}/P_{\text{ш}})_{\text{вх}} \ll 1$ уменьшается по сравнению со значением этого параметра при $(P_{\text{с}}/P_{\text{ш}})_{\text{вх}} \gg 1$ в $\dfrac{\sigma^2}{U_m^2\, 3{,}7} \gg 1$ раз.

Глава 3

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ СВЯЗИ

3.1. Количественное определение информации. Энтропия и производительность дискретного источника сообщений

Количество информации $I(a_i)$, содержащееся в символе a_i, выбираемом из ансамбля $\{a_i\}$ $(i=1, 2, 3, \ldots, K$, K — объем алфавита) с вероятностью $P(a_i)$, причем $\sum\limits_{i=1}^{K} P(a_i)=1$, определяется как[1]

$$I(a_i) = -\log P(a_i). \tag{3.1}$$

Основание логарифма в (3.1) может быть произвольным, оно определяет лишь систему единиц измерения количества информации. Чаще всего

$$I(a_i) = -\log_2 P(a_i). \tag{3.2}$$

При этом информация измеряется в двоичных единицах (битах). Одна двоичная единица информации — это количество информации, содержащееся в одном из двух выбираемых с равной вероятностью символов.

Среднее количество информации $H(A)$, приходящееся на один символ, выдаваемый дискретным источником независимых сообщений с объемом алфавита K, можно найти как математическое ожидание дискретной случайной величины Λ, определяющей количество информации, содержащееся в одном случайно выбранном символе (знаке) a_i:

$$H(A) = \overline{\Lambda} = -\sum_{i=1}^{K} P(a_i) \log P(a_i). \tag{3.3}$$

Эта величина называется энтропией источника независимых сообщений.

Одной из информационных характеристик дискретного источника является избыточность

$$\rho_{\text{и}} = 1 - \frac{H(A)}{H_{\text{макс}}(A)} = 1 - \frac{H(A)}{\log K}. \tag{3.4}$$

Избыточность источника зависит как от протяженности статистических связей между последовательно выбираемыми символами (памятью источника), так и от степени неравновероятности отдельных символов. Если источник без памяти (последовательно передаваемые символы независимы), все символы равновероятны ($Pa_i) = 1/K$), то $H(A) = H_{\text{макс}}(A)$ и избыточность $\rho_{\text{и}} = 0$.

---

[1] Эта характеристика определяет информативность выбора символа a_i для «неподготовленного» получателя и совершенно не учитывает как смыслового содержания, так и субъективную ценность передаваемых сообщений.

Если в единицу времени источник выдает в среднем $v_{\text{и}}$ символов (скорость источника $v_{\text{и}}$), то среднее количество информации, создаваемое источником в единицу времени,

$$H'(A) = v_{\text{и}} H(A) = \frac{1}{T_{\text{ср}}} H(A), \tag{3.5}$$

где $T_{\text{ср}}$ — средняя длительность одного символа.

Характеристику $H'(A)$ называют производительностью дискретного источника. Источник называется стационарным, если описывающие его вероятностные характеристики не меняются во времени.

Задачи

3.1.1. Источник сообщений выдает символы из ансамбля $A = \{a_i\}$ (здесь $i = 1, 2, 3, 4$) с вероятностями $P(a_1) = 0{,}2$; $P(a_2) = 0{,}3$; $P(a_3) = 0{,}4$; $P(a_4) = 0{,}1$. Найти количество информации, содержащееся в каждом из символов источника при их независимом выборе (источник без памяти). Вычислить энтропию и избыточность заданного источника.

3.1.2. Показать, что для источника без памяти с объемом алфавита K, энтропия $H(A)$ имеет максимальное значение $H_{\text{макс}}(A) = \log K$ при равновероятных символах.

3.1.3. Показать, что при равных объемах алфавитов K энтропия дискретного источника с памятью $H(A/A')$ не превышает энтропию дискретного источника без памяти $H(A)$.

3.1.4. Память двоичного стационарного дискретного источника с символами «0» и «1» простирается лишь на два соседних символа и, следовательно, дискретная последовательность символов, выдаваемых источником, описывается простой цепью Маркова с матрицей переходных вероятностей:

$$\begin{Vmatrix} P(1/1')\,P(1/0') \\ P(0/1')\,P(0/0') \end{Vmatrix},$$

где $P(a_i/a'_j)$ — вероятность символа $P(a_i)$ при условии, что ему предшествует символ a'_j.

Полагая, что $P(1/1') = 0{,}9$; $P(0/1') = 0{,}1$; $P(1/0') = 0{,}7$; найти энтропию источника и его избыточность. Найти энтропию и избыточность двоичного источника без памяти, но с теми же значениями вероятностей передачи символов.

3.1.5. Стационарный источник выдает за время $T=10^6$ с двоичными посылками длительности $\tau_и=10$ мс 10^7 бит информации. За какое время и каким количеством двоичных посылок можно передать тот же объем информации, если соответствующей обработкой полностью устранить избыточность источника? Определить коэффициент избыточности источника.

3.1.6. Показать, что максимальное количество информации, которое содержится в квантованном телевизионном сигнале, соответствующем одному телевизионному кадру при 625 строках разложения, равно $2{,}083\cdot10^6$ бит при условии, что сигнал, соответствующий одной строке изображения, представляет собой последовательность из 833 (при отношении сторон кадра 4/3) статистически независимых случайных по амплитуде импульсов, каждый из которых с равной вероятностью принимает одно из 16 значений. Найти избыточность телевизионного сигнала, если фактически кадр изображения с 16 градациями уровней содержит $9{,}37\cdot10^5$ бит информации [14].

3.1.7. Согласно экспериментальным данным безусловные вероятности букв русского алфавита характеризуются табл. 3.1.

ТАБЛИЦА 3.1

Буква	Вероятность	Буква	Вероятность	Буква	Вероятность
Пробел	0,175	м	0,026	ч	0,012
о	0,090	д	0,025	й	0,010
е	0,072	п	0,023	х	0,009
а	0,062	у	0,021	ж	0,007
и	0,062	я	0,018	ю	0,006
т	0,053	ы	0,016	ш	0,006
н	0,053	з	0,016	ц	0,004
с	0,045	ь, ъ	0,014	щ	0,003
р	0,040	б	0,014	э	0,003
в	0,038	г	0,013	ф	0,002
л	0,035				
к	0,028				

Найти энтропию источника, выдающего текст из этих букв, при отсутствии статистических связей между буквами. Вычислить избыточность источника, выдающего русский текст, обусловленную неравновероятностью выбора букв, а также и их статистическими связями (памятью источника), если по экспериментальным данным [5] энтропия источника $H(A)=1$ бит/буква.

3.1.8. Напряжение на выходе квантующего устройства может принимать одно из 17 дискретных значений с шагом квантования Δ. На вход квантующего устройства поступают независимые временные отсчеты (с интервалом $\Delta t=0{,}3$ с) сигнала с экспоненциальной плотностью вероятности мгновенных значений

$$w_1(x) = \frac{1}{2a}\exp\left(-\frac{|x|}{a}\right),$$

где $a=0{,}5$ В, $x_{\text{макс}}=1{,}6$ В, $\Delta=0{,}2$ В. Определить энтропию квантованного сигнала, его избыточность, скорость создания информации на выходе квантующего устройства (производительность).

3.1.9. Для устранения статистических связей символов источника (их «декорреляции») с целью повышения эффективности связи иногда прибегают к перекодировке, которая сводится к сопоставлению блока из $n>1$ символов первичного алфавита новому символу «укрупненного» алфавита. Показать, что этот способ устранения связей символов не изменяет избыточность сообщений.

3.1.10. После устранения статистических связей символов укрупненный алфавит характеризуется восемью символами, вероятности которых даны в табл. 3.2. Показать, что использование неравномерного двоичного кода, указанного в табл. 3.2 (это экономный код Хаффмена [12], который более вероятным символам сопоставляет более короткие кодовые комбинации), позволяет почти полностью устранить избыточность.

ТАБЛИЦА 3.2

Номер символа	Вероятность	Код	n_i
1	0,6	1	1
2	0,2	10	2
3	0,1	100	3
4	0,04	1000	4
5	0,025	10000	5
6	0,015	100000	6
7	0,01	1000000	7
8	0,01	10000000	8

Решения и ответы

Р.3.1.1. По ф-ле (3.2) находим:
$I(a_1) = -\log_2 0{,}2 = 2{,}33$ бит; $I(a_2) = -\log_2 0{,}3 = 1{,}75$ бит; $I(a_3) = -\log_2 0{,}4 = 1{,}33$ бит; $I(a_4) = -\log_2 0{,}1 = 3{,}33$ бит. Энтропию вычислим по ф-ле (3.3)

$$H(A) = -0{,}2\log_2 0{,}2 - 0{,}3\log_2 0{,}3 - 0{,}4\log_2 0{,}4 - -0{,}1\log_2 0{,}1 = 1{,}86 \text{ бит/символ}.$$

Согласно ф-ле (3.4)

$$\rho_{\text{и}} = 1 - \frac{1{,}86}{\log_2 4} = 0{,}07.$$

Р.3.1.2. Воспользуемся вспомогательным неравенством $\ln x \leqslant x-1$, которое следует из того факта, что линия $u = \ln x$ касается прямой $v = x-1$ в точке $x=1$ (рис. 3.1). Рассмотрим разность

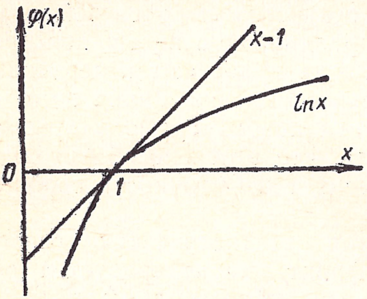


Рис. 3.1. К пояснению неравенства $\ln x \leqslant x-1$

$$H(A) - \log K = -\sum_{i=1}^{K} P(a_i)\log P(a_i) - \sum_{i=1}^{K} P(a_i)\log K = = \sum_{i=1}^{K} P(a_i)\log\frac{1}{KP(a_i)}.$$

Полагая $x = \frac{1}{KP(a_i)}$, можем записать $H(A) - \log K \leqslant \leqslant \sum_{i=1}^{K} P(a_i) \left[\frac{1}{KP(a_i)} - 1\right]\log e$, или $H(A) - \log K \leqslant \leqslant \sum_{i=1}^{K}\left[\frac{1}{K} - P(a_i)\right]\log e$. Легко убедиться, что

$\sum_{i=1}^{K}[\frac{1}{K}-P(a_i)]=0$. Следовательно, $H(A)-\log K\leqslant 0$. Знак равенства будет только тогда, когда $x=\frac{1}{KP(a_i)}=1$, поскольку при этом $\ln x=x-1$. Поэтому $H(A)=\lg K$ при $P(a_i)=\frac{1}{K}$.

Р.3.1.3. Пусть $P(a_i/a'_j)$ — условная вероятность того, что источник выбирает символ с номером i ($i=1, 2, 3, \ldots, K$) при условии, что ранее был выбран символ с номером j. Если символ a'_j фиксирован, то энтропия источника

$$H(A/a'_j)=-\sum_{i=1}^{K}P(a_i/a'_j)\log P(a_i/a'_j),$$

Если предшествующий символ принимает произвольные значения, то энтропия источника

$$H(A/A')=\sum_{j=1}^{K}P(a'_j)H(A/a'_j)=-\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}P(a'_j)P(a_i/a'_j)\times$$
$$\times\log P(a_i/a'_j).$$

Принимая во внимание, что $P(a'_j)P(a_i/a'_j)=P(a_i, a'_j)$ — совместная вероятность выбора символов a_i и a'_j, имеем

$$H(A/A')=-\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}P(a_i, a'_j)\log P(a_i/a'_j).$$

При независимом выборе символов (при отсутствии памяти) энтропия источника

$$H(A)=-\sum_{i=1}^{K}P(a_i)\log P(a_i)=-\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}P(a_i, a'_j)\log P(a_i),$$

так как

$$P(a_i)=\sum_{j=1}^{K}P(a_i, a'_j).$$

Для разности $H(A/A')-H(A)$ можно записать

$$H(A/A')-H(A)=\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}P(a_i, a'_j)\ln\frac{P(a_i)}{P(a_i/a'_j)}\log e.$$

Используя соотношение $\ln x \leqslant x-1$ (равенство достигается лишь при $x=1$), получаем

$$H(A/A')-H(A)\leqslant \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}P(a_i,\ a'_j)\left[\frac{P(a_i)}{P(a_i/a'_j)}-1\right]\log e=$$

$$=\left[\sum_{j=1}^{K}P(a'_j)\sum_{i=1}^{K}P(a_i)-\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}P(a_i,\ a'_j)\right]\log e=0.$$

Поскольку $H(A/A')-H(A)\leqslant 0$, то $H(A/A')\leqslant H(A)$. Заметим, что $H(A/A')=H(A)$ только при $\dfrac{P(a_i)}{P(a_i/a'_j)}=1$, или $P(a_i/a'_j)=P(a_i)$. Выполнение этого условия возможно лишь при отсутствии памяти у источника. Итак, условная энтропия не может превысить энтропию безусловную.

Р.3.1.4. Прежде всего найдем безусловные вероятности передачи символов из очевидного соотношения $P(0)=P(0)P(0/0')+[1-P(0)]P(0/1')$. При заданных значениях переходных вероятностей $P(0)=0{,}125$; $P(1)=0{,}875$. Можно убедиться в справедливости соотношения

$$P(1)=P(0)P(1/0')+[1-P(0)]P(1/1').$$

Энтропия источника

$$H(A/A')=-P(0)[P(0/0')\log_2 P(0/0')+P(1/0')\times$$
$$\times\log_2 P(1/0')]-P(1)[P(0/1')\log_2 P(0/1')+$$
$$+P(1/1')\log_2 P(1/1')]=0{,}51 \text{ бит/символ.}$$

Избыточность источника $\rho_{\text{и}}=1-\dfrac{H(A/A')}{H_{\text{макс}}(A)}=0{,}49$. Для источника без памяти при тех же безусловных вероятностях передачи символов

$$H(A)=-P(1)\log P(1)-P(0)\log P(0)=0{,}541 \text{ бит/символ},$$

$$\rho_{\text{и}}=0{,}459.$$

Р.3.1.5. Заданный объем информации источник передает

$$n=\frac{T}{\tau}=10^8$$

посылками. Средняя информация на символ $H=\dfrac{I}{n}=\dfrac{10^7}{10^8}=0{,}1$ бит/символ. Если избыточность полностью устранена, то каждый символ двоичного источника несёт в себе $H_{\text{макс}}=1$ бит информации и заданный объем передается $n_0=\frac{I}{H_{\text{макс}}}=10^7$ посылками, или за время $T_0=\tau n_0=10^5$ с. Избыточность источника

$$\rho_{\text{и}}=\frac{n-n_0}{n}=1-\frac{n_0}{n}=1-\frac{T_0}{T}=1-\frac{H}{H_{\text{макс}}}=0{,}9.$$

Обратим внимание на то, что сокращение избыточности источника позволило бы на 90% более экономично использовать во времени канал связи.

Р.3.1.6. Количество информации, содержащееся в одном элементе сигнала, $H_{\text{макс}}(A)=\log_2 16=4$ бит/символ. Число элементов изображения в одном кадре $N=833\cdot 625=520\,625$. Количество информации в одном кадре $I=NH_{\text{макс}}=4\cdot 520625=2{,}082\cdot 10^6$ бит. Энтропия реального телевизионного изображения при 16 градациях яркости [14]

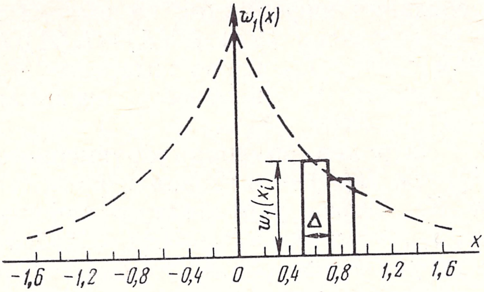


Рис. 3.2. К определению вероятностей появления уровней квантованного сигнала

$$H(A)\approx\frac{9{,}37\cdot 10^5}{5{,}21\cdot 10^5}=1{,}8\ \text{бит/символ}.$$

Избыточность реального телевизионного сигнала $\rho_{\text{и}}=1-H(A)/H_{\text{макс}}(A)=0{,}55$.

Р.3.1.7. По ф-ле (3.3)

$$H(A)=-\sum_{i=1}^{32}P(a_i)\log_2 P(a_i)=4{,}36\ \text{бит/символ};$$

$$H_{\text{макс}}(A)=\log_2 32=5\ \text{бит/символ}.$$

Согласно (3.4) $\rho_{\text{и}}=1-4{,}36/5=0{,}128$.

Р.3.1.8. Вероятности появления уровней квантованного сигнала определим по приближенной формуле $P(x_i)=w_1(x_i)\Delta=0{,}2\exp\left(-\frac{|x_i|}{0{,}5}\right)$, которая иллюстрируется рис. 3.2. Результаты расчета сведены в табл. 3.3.

По ф-ле (3.3) находим энтропию

$$H=-\sum_{i=-8}^{8}P(x_i)\log P(x_i)=3{,}46\ \text{бит/отсчет.}$$

Избыточность находим по ф-ле (3.4)

$$\rho_\text{и}=1-\frac{3{,}46}{\log_2 17}=0{,}159.$$

Скорость создания информации на выходе квантующего устройства согласно (3.5) $H'(A)=H(A)/T_\text{ср}$.

В данном случае $T_\text{ср}$ равно интервалу между двумя соседними отсчетами входного сигнала: $H'(A)=3{,}46/0{,}3=11{,}53$ бит/с.

Р.3.1.9. Энтропия символа укрупненного алфавита $H_\text{у}=nH(A)$, где $H(A)$ — энтропия первичного алфавита с объемом K. Объем укрупненного алфавита $K_\text{у}=K^n$, поэтому $H_\text{у.макс}=\log K^n=nH_\text{макс}(A)$. Избыточность источника с укрупненным алфавитом $\rho_\text{и.у}$ согласно (3.4)

$$\rho_\text{и.у}=1-\frac{H_\text{у}}{H_\text{у.макс}}=1-\frac{[n\,H(A)]}{n\,H_\text{макс}(A)}=\rho_\text{и},$$

где $\rho_\text{и}$ — избыточность первичного алфавита.

Поскольку избыточность осталась неизменной, но устранены связи символов, приходится констатировать, что в укрупненном алфавите отдельные символы более значительно отличаются своими априорными вероятностями.

Устранение избыточности сообщения укрупненного алфавита возможно использованием неравномерного кода (см. Р.3.1.10).

Р.3.1.10. Обозначим источник восьмиричных символов через A, а источник, создающий двоичные символы неравномерного кода, через B. Энтропия источника A: $H(A)=-\sum_{i=1}^{8}p_i\log_2 p_i=1{,}781$ бит/символ. Избыточность источника B согласно (3.4)

$$\rho_\text{и}(B)=1-\frac{H(B)}{\log_2 2}=1-\frac{v_B\,H(B)}{v_B},$$

ТАБЛИЦА 3.3

i	—8	—7	—6	—5	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	—1,6	—1,4	—1,2	—1,0	—0,8	—0,6	—0,4	—0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
$P(x_i)$	$8 \cdot 10^{-3}$	$1{,}2 \cdot 10^{-2}$	$1{,}8 \cdot 10^{-2}$	$2{,}8 \cdot 10^{-2}$	$4{,}0 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-2}$	$1{,}34 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$1{,}34 \cdot 10^{-1}$	$9 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$	$4{,}0 \cdot 10^{-2}$	$2{,}8 \cdot 10^{-2}$	$1{,}8 \cdot 10^{-2}$	$1{,}2 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-3}$

$v_B = 1/T_{\text{ср } B}$ — количество символов источника B в единицу времени; $T_{\text{ср } B}$ — средняя длительность символа источника.

Чтобы не было потерь информации при кодировании, надо потребовать равенства производительностей источников A и B, т. е. $v_B H(B) = v_A H(A)$. Тогда

$$\rho_{\text{и}}(B) = 1 - \frac{v_A\, H(A)}{v_B} = 1 - \frac{H(A)}{\bar{n}},$$

$\bar{n} = v_B/v_A = T_{\text{ср } A}/T_{\text{ср } B}$ — среднее количество двоичных символов источника B на один символ источника A.

В соответствии с табл. 3.2 $\bar{n} = \sum\limits_{i=1}^{8} p_i n_i = 1{,}825$ и $\rho_{\text{и}}(B) = 1 - \frac{1{,}781}{1{,}825} = 0{,}024$. Избыточность составляет всего 2,4%.

3.2. Количество и скорость передачи информации по дискретному каналу. Пропускная способность дискретного канала

Если на вход канала с шумами поступают символы b_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), а с выхода снимаются символы b'_j ($j = 1, 2, \ldots, m'$), то условные вероятности переходов $P(b''_j/b_i)$, а также и апостериорные вероятности $P(b_i/b'_j)$ удовлетворяют соотношениям[1]:

$$0 < P(b'_j/b_i) < 1; \quad 0 < P(b_i/b'_j) < 1. \tag{3.6}$$

Это означает, что при фиксированном символе b'_j нельзя с полной определенностью утверждать, какой символ b_i передавался. Следовательно, часть информации, содержащейся в символе b_i, оказалать потерянной.

Среднее количество информации, теряемой при передаче произвольного символа по каналу без памяти

$$I(B/B') = H(B/B') = -\sum_{j=1}^{m'} \sum_{i=1}^{m} P(b'_j)\, P(b_i/b'_j) \log P(b_i/b'_i) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m'} \sum_{i=1}^{m} P(b_i, b'_j) \log \frac{P(b_i, b'_j)}{P(b'_j)}. \tag{3.7}$$

Эта величина называется ненадежностью канала и показывает степень неопределенности последовательности входных символов $B(t)$ при условии, что принята последовательность $B'(t)$.

Средним количеством переданной по каналу информации на один символ называется разность между количеством информации на входе канала $I(B)$ и количеством информации, потерянной в канале $I(B/B')$. Для источника и канала без памяти

---

[1] Для канала без шумов эти вероятности равны 0, если $j \neq i$, и равны 1, если $j = i$.

$$I(B, B') = I(B) - I(B/B') = H(B) - H(B/B') =$$
$$= -\sum_{i=1}^{m} P(b_i) \log P(b_i) + \sum_{j=1}^{m'} \sum_{i=1}^{m} P\left(b_i, b_j'\right) \log P\left(b_i/b_j'\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m'} \sum_{i=1}^{m} P\left(b_i, b_j'\right) \log \frac{P\left(b_i, b_j'\right)}{P(b_i)\, P(b_j)}. \qquad (3.8)$$

Это среднее количество информации на один символ, содержащееся в выходной последовательности $B'(t)$ относительно входной последовательности $B(t)$. Поскольку $0 \leqslant H(B/B') \leqslant H(B)$ (условная энтропия никогда не превосходит безусловную), то $0 \leqslant I(B, B') \leqslant \leqslant I(B)$. Крайнее значение слева имеет место, если символы входа и выхода независимы (очень сильные помехи или обрыв связи), а крайнее значение справа — при отсутствии помех.

Из (3.8) следует, что

$$I(B, B') = I(B', B) = H(B') - H(B'/B). \qquad (3.9)$$

Величина

$$H(B') = I(B') \qquad (3.10)$$

определяет информацию (энтропию) выходных символов канала. Часть этой информации является полезной (информация о входных символах b_i). Остальная часть информации является ложной (созданной помехами в канале). Величина $H(B'/B) = I(B'/B)$ определяет информацию, содержащуюся в последовательности выходных символов $B'(t)$ при известной последовательности входных символов $B(t)$. Поскольку выходная последовательность отличается от входной исключительно из-за помех в канале, то $H(B'/B)$ характеризует информацию именно о помехах в канале или энтропию шума:

$$H(B'/B) = -\sum_{j=1}^{m'} \sum_{i=1}^{m} P\left(b_i, b_j'\right) \log P\left(b_j'/b_i\right). \qquad (3.11)$$

Если на вход дискретного канала поступает в среднем $v_\text{к}$ символов в единицу времени, то можно определить среднюю скорость передачи информации по каналу с шумами:

$$I'(B, B') = v_\text{к} I(B, B') = H'(B) - H'(B/B') = H'(B') - H'(B'/B). \qquad (3.12)$$

Здесь $H'(B)$ — производительность источника на входе канала; $H'(B/B')$ — ненадежность канала в единицу времени; $H'(B')$ — производительность источника, образованного выходом канала; $H'(B'/B)$ — количество ложной информации, создаваемой шумом в единицу времени.

Пропускной способностью канала называется предельная скорость передачи информации при заданных свойствах канала (заданной помехе). Для дискретного канала пропускная способность

$$C = v_\text{к} \max I(B, B'), \qquad (3.13)$$

причем max ищется по всем возможным источникам входа при заданном $v_к$ и объеме алфавита символов входа m [1].

С понятием пропускной способности канала связана одна из важнейших теорем теории информации — основная теорема К. Шеннона об оптимальном кодировании. Применительно к дискретному источнику эта теорема гласит: если производительность источника сообщений меньше пропускной способности канала

$$H'(A) < C, \qquad (3.14)$$

то существует способ оптимального кодирования и декодирования (преобразования сообщения в сигнал на передаче и обратного его преобразования в сообщение на приеме), при котором вероятность ошибки может быть сделана как угодно малой. Если $H'(A) > C$, такого способа не существует.

Средняя вероятность ошибки при оптимальном кодировании определяется соотношением

$$p_{ош} = 2^{-T[C-H'(A)]}, \qquad (3.15)$$

где T — длительность сигнала, соответствующего последовательности символов источника достаточно большой длины n; $C-H'(A)$ определяет запас пропускной способности канала.

Для дискретного канала без шумов теорема оптимального кодирования формулируется следующим образом: если производительность источника меньше пропускной способности канала, то существуют способы кодирования и декодирования, обеспечивающие сколь угодно высокую надежность отождествления принятых комбинаций с переданными.

Задачи

3.2.1. Найти ненадежность $H(B/B')$ и энтропию шума двоичного симметричного канала со стиранием (рис. 3.3) с вероятностями переходов

$$P(0'/0) = P(1'/1) = 1 - p_0 - p_c; \quad P(?/0) = P(?/1) = p_c;$$
$$P(1'/0) = P(0'/1) = p_0$$

и априорными вероятностями символов $P(0)$ и $P(1) = 1 - P(0)$.

3.2.2. Показать, что в симметричном m-позиционном канале без памяти и стирания энтропия шума определяется выражением

$$H(B'/B) = -p \log \frac{p}{m-1} - (1-p)\log(1-p),$$

где p — суммарная вероятность ошибки.

---

[1] Строго говоря, C следует определить как наименьшую верхнюю границу от $v_к I(B, B')$, так как одно единственное максимальное значение скорости по всевозможным источникам входа может и не существовать.

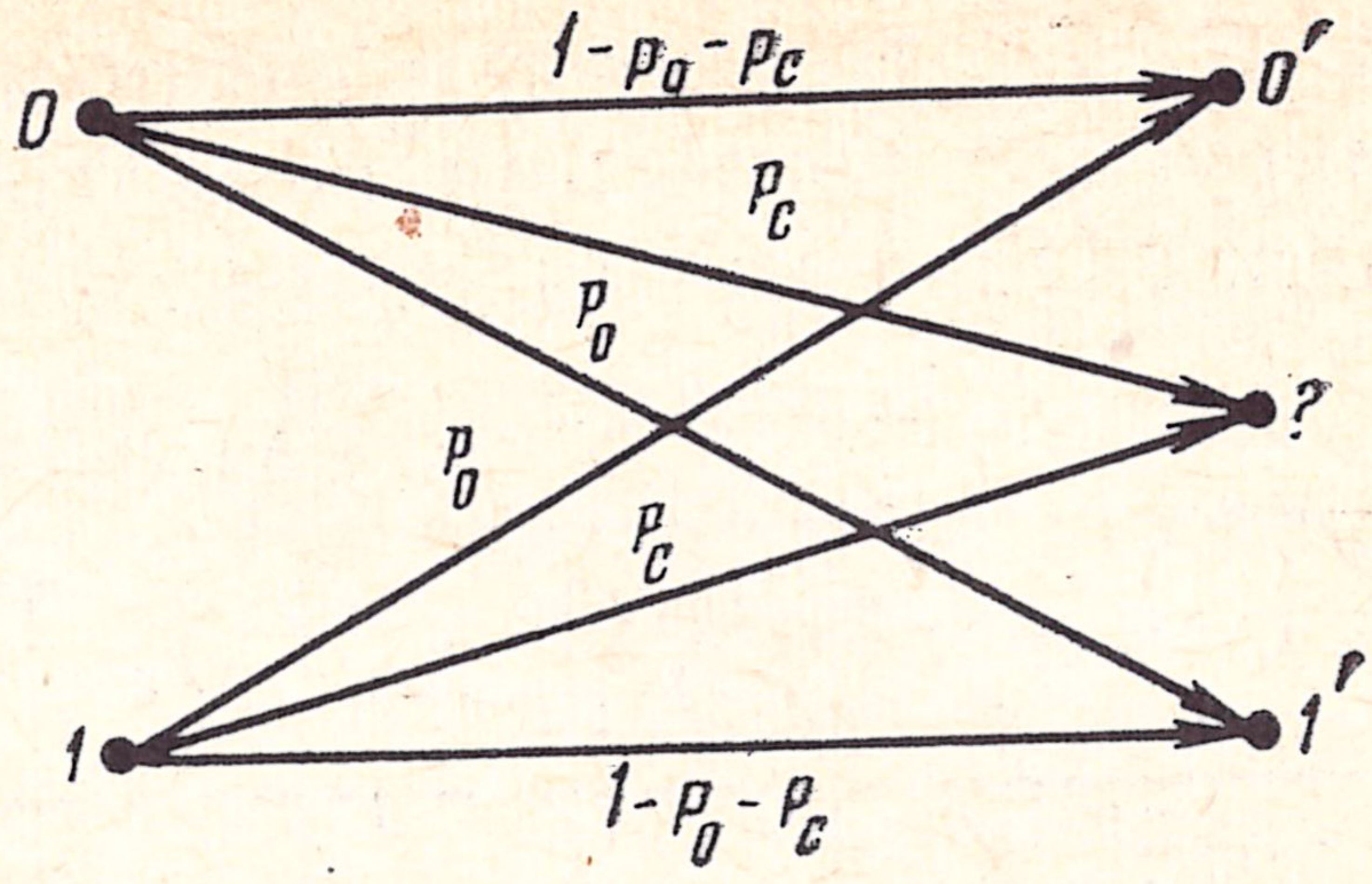


Рис. 3.3. Граф двоичного симметричного канала со стиранием

3.2.3. Найти энтропию шума в двоичном симметричном канале без памяти, если энтропия источника на входе канала $H(B) = 1000$ бит/символ, энтропия источника, образованного выходом канала, $H(B') = 2000$ бит/символ, ненадежность канала $H(B/B') = 200$ бит/символ.

3.2.4. Показать, что при вероятности ошибки, стремящейся к нулю, скорость передачи информации по двоичному симметричному каналу со стиранием (задача 3.2.1) определяется соотношением

$$I'(B,\ B') = v_{\text{к}} H(B)(1 - p_{\text{c}}),$$

где $v_{\text{к}}$ — число символов, поступающих на вход канала в единицу времени.

3.2.5. На вход дискретного канала поступает $H(B)=20$ бит/символ, а по каналу в среднем передается 10 бит/символ полезной информации. Энтропия шума в канале $H(B'/B)=40$ бит/символ.

Найти ненадежность канала и энтропию выходных символов. Определить производительность источника на входе канала, ненадежность канала в единицу времени, среднюю скорость передачи информации по каналу и скорость создания ложной информации в канале, если на вход канала поступает в среднем $v_{\text{к}}=50$ символ/с.

3.2.6. Показать, что для m-ичного симметричного канала без памяти и стирания с вероятностями переходов

$$P(b'_j/b_i) = \begin{cases} 1 - p & \text{при} \quad j = i, \\ \dfrac{p}{m-1} & \text{при} \quad j \neq i \end{cases}$$

пропускная способность определяется соотношением

$$C = v_{\text{к}}\left[\log m + (1-p)\log(1-p) + p\log\frac{p}{m-1}\right].$$

Упростить эту формулу для двоичного канала. Построить график зависимости пропускной способности двоичного канала от вероятности ошибки.

3.2.7. По каналу связи передается сообщение, формируемое из восьми символов с вероятностями появления, заданными табл. 3.4.

ТАБЛИЦА 3.4

Символ	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
$P(b_i)$	0,20	0,15	0,2	0,15	0,1	0,1	0,05	0,05

Канал имеет полосу пропускания, позволяющую передавать элементы сообщения со средней длительностью $\tau_и=0,5$ мс. Шум в канале отсутствует. Определить пропускную способность канала и скорость передачи.

3.2.8. Показать, что избыточность оптимального по Шеннону кода определяется соотношением

$$\rho_{к.мин} = 1 - \frac{C}{v_к \log m} + \varepsilon$$

(ε — сколь угодно малая положительная величина).

Найти минимально возможную избыточность оптимального кода для двоичного канала при вероятности ошибки $p=0$ и 0,5.

3.2.9. Показать, что способы кодирования и декодирования, обеспечивающие сколь угодно малую вероятность ошибки, существуют лишь в случае, когда среднее число символов кода на один символ источника удовлетворяет условию

$$\bar{n} = \frac{v_к}{v_и} > \frac{H(A)}{\max I(B,\ B')}.$$

3.2.10. Какой запас пропускной способности $C - H'(A)$ должен иметь канал, чтобы при использовании оптимального кода с длительностью кодовой комбинации $T=200$ мс вероятность ошибки не превысила величину 10^{-6}?

Во сколько раз изменится длительность кодовой последовательности оптимального кода, если при неизменной вероятности ошибки запас пропускной способности канала уменьшается в 2 раза?

3.2.11. Показать, что ненадежность связи (вероятность ошибки) в канале с шумами не может быть сколь угодно малой, если пропускная способность канала C меньше производительности $H'(A)$.

3.2.12. Согласно закону больших чисел стационарный дискретный источник выдает два типа последовательностей символов достаточно большой длины n: а) типичные последовательности (с примерно одинаковыми вероятностями $p_{\text{тип}}=1/N_{\text{тип}}$), суммарная вероятность которых близка к 1; б) нетипичные последовательности, суммарная вероятность которых δ близка к нулю.

Полагая, что оптимальное кодирование в канале без шумов[1] сводится к передаче только типичных последовательностей, показать, что при выполнении условия (3.14) вероятность неправильного отождествления принятой кодовой последовательности равна δ, что доказывает теорему Шеннона.

Решения и ответы

Р.3.2.1. В двоичном симметричном канале со стиранием объем алфавита на входе $m=2$, а объем алфавита на выходе $m'=3$. Энтропия шума согласно (3.11)

$$H(B'/B) = -\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} P(b_i)\,P(b'_j/b_i)\log P(b'_j/b_i) =$$

$$= -P(0)(1-p_0-p_c)\log(1-p_0-p_c) - P(1)\,p_0\log p_0 -$$

$$- P(0)\,p_0\log p_c - P(1)(1-p_0-p_c)\log(1-p_0-p_c) -$$

$$- P(0)\,p_c\log p_c - P(1)\,p_c\log p_c =$$

$$= (1-p_0-p_c)\log(1-p_0-p_c) - p_0\log p_0 - p_c\log p_c.$$

Отметим, что ненадежность рассматриваемого канала не зависит от априорных вероятностей входных символов. Перейдем к нахождению энтропии шума.

В соответствии с формулой Байеса находим апостериорные вероятности:

$$P(0/0') = \frac{P(0)(1-p_0-p_c)}{P(0)(1-p_0-p_c)+P(1)\,p_0};$$

$$P(1/1') = \frac{P(1)(1-p_0-p_c)}{P(1)(1-p_0-p_c)+P(0)\,p_0};$$

$$P(0/1') = \frac{P(0)\,p_0}{P(1)(1-p_0-p_c)+P(0)\,p_0};$$

---

[1] В канале с шумами такой способ кодирования также обеспечивает предельную эффективность.

$$P(1/0') = \frac{P(1)\,p_0}{P(0)\,(1-p_0-p_c)+P(1)\,p_0};$$

$$P(0/?) = P(0); \quad P(1/?) = P(1).$$

Совместные вероятности символов входа и выхода:

$$P(0,\ 0') = P(0)\,(1-p_0-p_c); \quad P(0,\ 1') = P(0)\,p_0;$$

$$P(1,\ 1') = P(1)\,(1-p_0-p_c); \quad P(1,\ 0') = P(1)\,p_0;$$

$$P(0,\ ?) = P(0)\,p_c; \quad P(1,\ ?) = P(1)\,p_c.$$

Подставив найденные совместные и апостериорные вероятности в ф-лу (3.7), получим для ненадежности двоичного симметричного канала со стиранием

$$H(B/B') = -P(0)\,(1-p_0-p_c)\log\frac{P(0)\,(1-p_0-p_c)}{P(0)\,(1-p_0-p_c)+P(1)p_0} -$$

$$-P(1)\,p_0\log\frac{P(1)\,p_0}{P(1)\,(1-p_0-p_c)+P(0)\,p_0} -$$

$$-P(0)\,p_0\log\frac{P(0)\,p_0}{P(1)\,p_0+P(0)\,(1-p_0-p_c)} - P(1)\,(1-p_0-$$

$$-p_c)\log\frac{P(1)\,(1-p_0-p_c)}{P(1)\,(1-p_0-p_c)+P(0)\,p_0} - P(0)\,p_c\log P(0) -$$

$$-P(1)\,p_c\log P(1).$$

Если $p_0 \to 0$, то $H(B/B') = -P(0)\,p_c\log P(0) - P(1)\,p_c \times \times \log P(1) = p_c H(B)$.

Ненадежность канала зависит как от вероятности стирания, так и энтропии источника на входе канала.

Р.3.2.2. Суммарная вероятность ошибки p — это вероятность того, что при передаче фиксированного символа b_i будет принят любой символ, кроме символа b'_i. Поскольку всего может произойти $m-1$ ошибочных переходов при фиксации символа b_i на передаче, а канал симметричен, то вероятность приема фиксированного символа b'_j при передаче символа b_i будет равна $\frac{p}{m-1}$.

Следовательно, в m-ичном симметричном канале вероятности переходов удовлетворяют условиям:

$$P(b'_i/b_i) = \begin{cases} 1-p & \text{при} \quad j = i, \\ \dfrac{p}{m-1} & \text{при} \quad j \neq i. \end{cases}$$

Подставляя эти вероятности в выражение (3.11), находим энтропию шума

$$H(B'/B) = -\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} P(b_i)\, P(b'_j/b_i) \log P(b'_j/b_i).$$

Выделяя из этой суммы слагаемые с номером $i=j$, получаем

$$H(B'/B) = -\sum_{i=1}^{m} P(b_i)(1-p)\log(1-p) -$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i\neq j} P(b_i)\frac{p}{m-1}\log\frac{p}{m-1} =$$

$$= -(1-p)\log(1-p) - p\log\frac{p}{m-1}.$$

Р.3.2.3. Согласно ф-ле (3.8) количество переданной по каналу информации

$$I(B, B') = H(B) - H(B/B') = 800 \text{ бит/символ.}$$

В соответствии с (3.9) находим энтропию шума

$$H(B'/B) = H(B') - I(B, B') = 1200 \text{ бит/символ.}$$

Р.3.2.4. Согласно ф-ле (3.12) находим скорость передачи информации

$$I'(B, B') = v_к I(B, B') = v_к[H(B) - H(B/B')].$$

Как показано в Р.3.2.1, ненадежность двоичного симметричного канала со стиранием при $p_0 \to 0$ $H(B/B') = p_c H(B)$. Следовательно, скорость передачи информации в таком канале $I'(B, B') = v_к[H(B) - p_c H(B)] = v_к H(B)(1-p_c)$.

Чем больше вероятность стирания p_c, тем надежнее отождествляются символы «1» и «0» в месте приема, однако одновременно падает скорость передачи информации по каналу. Следовательно, имеет место обмен между верностью (качеством) и количеством переданной информации.

Р.3.2.5. Ненадежность канала согласно (3.8)

$$H(B/B') = H(B) - I(B, B') = 10 \text{ бит/символ.}$$

Энтропия выходных символов по (3.9)

$$H(B') = H(B'/B) + I(B, B') = 50 \text{ бит/символ.}$$

Производительность источника на входе канала по ф-ле (3.5)

$$H'(B) = v_к H(B) = 1000 \text{ бит/с}.$$

Ненадежность канала в единицу времени в соответствии с (3.12)

$$H'(B/B') = v_к H(B/B') = 500 \text{ бит/с}.$$

Средняя скорость передачи информации по каналу согласно (3.12)

$$I'(B, B') = H'(B) - H'(B/B') = 500 \text{ бит/с}.$$

Скорость создания ложной информации в канале

$$H'(B'/B) = H'(B') - I'(B, B') = v_к H(B') - I'(B, B') = 2000 \text{ бит/с}.$$

Р.3.2.6. Согласно (3.13) пропускная способность канала

$$C = v_к \max [H(B') - H(B'/B)].$$

Как показано в Р.3.2.2, энтропия шума m-ичного симметричного канала без памяти и без стирания равна

$$H(B'/B) = -(1-p)\log(1-p) - p\log\frac{p}{m-1}.$$

С учетом этого имеем

$$C = v_к\left[\max H(B') + (1-p)\log(1-p) + p\log\frac{p}{m-1}\right].$$

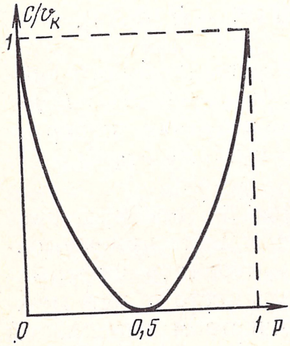


Рис. 3.4. Зависимость нормированной пропускной способности двоичного симметричного канала без памяти от вероятности ошибочного приема символа

Очевидно, что $\max H(B') = \log m$. Следовательно,

$$C = v_к\left[\log m + (1-p)\log(1-p) + p\log\frac{p}{m-1}\right].$$

Для двоичного симметричного канала без памяти и стирания ($m = m' = 2$)

$$C = v_к[1 + p\log p + (1-p)\log(1-p)].$$

График величины $C/v_к$ в зависимости от p показан на рис. 3.4. Пропускная способность канала равна нулю, когда вероятности перехода $P(0'/1) = P(1'/0) = 0,5$

(в этом случае символы на входе и выходе оказываются независимыми).

Р.3.2.7. При отсутствии шума ненадежность канала $H(B/B')=0$ и, следовательно, пропускная способность канала

$$C = v_к \max H(B) = v_к \log m = 3\, v_к.$$

Канал способен пропустить в единицу времени $v_к = 1/\tau_и = 1/0{,}5 \cdot 10^{-3} = 2000$ символов. Поэтому $C = 2000 \times 3 = 6000$ бит/с. Скорость передачи информации при заданном ансамбле

$$I'(B/B') = v_к H(B) = 5700 \text{ бит/с}.$$

Р.3.2.8. Избыточность кода (вторичного алфавита) можно определить, как обычно (3.4):

$$\rho_к = 1 - \frac{H(B)}{H_{макс}(B)},$$

где $H(B)$ — энтропия ансамбля кодовых символов. Очевидно, что при объеме ансамбля кодовых символов $m H_{макс}(B) = \log m$. Следовательно,

$$\rho_к = 1 - \frac{H(B)}{\log m} = 1 - \frac{H'(B)}{v_к \log m}.$$

Здесь $H'(B) = v_к H(B)$; $v_к$ — число кодовых символов, поступающих на вход канала в единицу времени. Поскольку при кодировании должны отсутствовать потери информации, то $H'(B) = H'(A) = v_и H(A)$, где $v_и$ — число символов, создаваемых источником сообщения в единицу времени; $H(A)$ — энтропия источника. С учетом этого

$$\rho_к = 1 - \frac{v_и H(A)}{v_к \log m}.$$

Согласно теореме Шеннона лишь при $v_и H(A) < C$ существует оптимальный способ кодирования. Следовательно, избыточность кода не может быть меньше величины

$$\rho_{к.мин} = 1 - \frac{C}{v_к \log m} + \varepsilon,$$

где ε — сколь угодно малая положительная величина.

Для двоичного симметричного канала без памяти и стирания согласно Р.3.2.6 $C = v_к[1 + p \log p + (1-p) \times \log(1-p)]$. Подставляя эту величину в выражение

$\rho_{\text{к.мин}}$ и учитывая, что $m=2$, получаем

$$\rho_{\text{к.мин}} = 1 - \frac{v_{\text{к}}\,[1 + p \log p + (1-p)\log(1-p)]}{v_{\text{к}} \log_2 2} + \varepsilon =$$

$$= - p \log p - (1-p)\log(1-p) + \varepsilon.$$

Если $p=0$ (в канале нет ошибок), то $\rho_{\text{к.мин}} = \varepsilon \to 0$. Если $p=0{,}01$, то $\rho_{\text{к.мин}} \approx 0{,}067$, т. е. при не очень сильных помехах в канале избыточность оптимального кода невелика.

Р.3.2.9. Способы кодирования и декодирования, обеспечивающие сколь угодно малую вероятность ошибки, согласно теореме Шеннона, существуют лишь при $H'(A) < C$. Если источник информации выдает в единицу времени $v_{\text{и}}$ символов, а его энтропия $H(A)$, то $H'(A) = v_{\text{и}} H(A)$. Пропускная способность канала по определению равна $C = v_{\text{к}} \max I(B, B')$. Следовательно, можно записать, что оптимальное кодирование по Шеннону возможно лишь при $v_{\text{и}} H(A) < v_{\text{к}} \max I(B, B')$ или

$$\bar{n} = \frac{v_{\text{к}}}{v_{\text{и}}} > \frac{H(A)}{\max I(B,\ B')}.$$

Здесь $\bar{n}$ — среднее число символов кода на один символ источника.

Р.3.2.10. Из ф-лы (3.15) получаем запас пропускной способности

$$C - H'(A) = -\frac{\log_2 p_{\text{ош}}}{T} = -\frac{\log_2 \cdot 10^{-6}}{200 \cdot 10^{-3}} = 90{,}96 \text{ бит/с}.$$

Подчеркнем, что чем больше запас пропускной способности, тем легче реализуется система связи, но одновременно падает ее эффективность. Очевидно, что

$$T = -\frac{\log_2 p_{\text{ош}}}{C - H'(A)}.$$

Поэтому при сохранении вероятности ошибки (качества связи) неизменной уменьшение запаса пропускной способности в 2 раза (рост эффективности системы) влечет за собой увеличение длительности кодовой комбинации в 2 раза, что приводит к усложнению системы (в частности, за счет усложнения устройств памяти на передаче и приеме).

Р.3.2.11. Предположим, что можно закодировать некоторый источник с производительностью $H'(A) = C + 2\varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$ так, что ненадежность канала $H'(A/A') \leqslant \varepsilon$. Тогда оказывается, что скорость передачи информации в системе связи $I'(A, A') = H'(A) - H'(A/A') > C + \varepsilon$, т. е. будет больше пропускной способности канала, что противоречит ее определению. Противоречия не будет, если допустить, что при $H'(A) > C$ сообщение передается с отличной от нуля ненадежностью $H'(A/A') > \varepsilon$.

Р.3.2.12. С учетом того, что $H'(A) = v_и H(A)$, а пропускная способность канала без шумов $C = v_к \log m$, условие (3.14) можно записать

$$\bar{n} = \frac{v_к}{v_и} > \frac{H(A)}{\log m}.$$

(Здесь $v_и$ — число символов, выдаваемых источником в единицу времени; $v_к$ — число символов, выдаваемых кодером в единицу времени; $\bar{n}$ — среднее число кодовых символов на один символ источника; m — основание кода.)

Предположим, что все типичные последовательности источника достаточно большой длительности T, число которых $N_{тип}(A) = 2^{Tv_и H(A)}$, кодируются двоичными кодовыми комбинациями $\vec{b}$ той же длительности, содержащими $Tv_к$ символов. Возможное число кодовых комбинаций $N(B) = 2^{Tv_к}$.

Очевидно, что $v_к = v_и H(A) + \varepsilon$ (при $m = 2$).

В этом случае

$$\frac{N(B)}{N_{тип}(A)} = \frac{2^{T[\varepsilon + v_и H(A)]}}{2^{T v_и H(A)}} = 2^{T\varepsilon}.$$

Если

$$\varepsilon > \frac{1}{T \ln 2\, N_{тип}(A)},$$

$$\frac{N(B)}{N_{тип}(A)} > \exp\left(-\frac{1}{N_{тип}(A)}\right) = 1 + \frac{1}{N_{тип}(A)} + + \frac{(N_{тип}(A))^{-2}}{2!} + \ldots$$

или же $N(B) \geqslant N_{тип}(A) + 1$. Таким образом, при выполнении условия (3.14) число кодовых комбинаций по меньшей мере на 1 больше числа типичных последовательностей источника. Если сопоставить «лишнюю» кодовую комбинацию всем нетипичным последовательностям источника и тем самым заранее предопределить их ошибочный прием, то вероятность неправильного отождествления кодовой комбинации будет равна вероятности появления нетипичных последовательностей δ, которая при $T \to \infty$ стремится к нулю, что доказывает теорему Шеннона.

3.3. Энтропия и производительность непрерывного источника сообщений

Для описания информационных свойств непрерывного источника широко используется понятие дифференциальной энтропии $h(X)$. Это та часть энтропии непрерывного источника, которая зависит от функции плотности вероятности сигнала $X(t)$, выдаваемого источником

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} w_1(x) \log w_1(x)\, dx. \tag{3.16}$$

Наибольшее значение дифференциальной энтропии при независимых отсчетах и заданной дисперсии σ^2 имеет случайный процесс $X(t)$ с нормальным распределением мгновенных значений. В этом случае

$$h_{\text{макс}}(X) = \log \sqrt{2\pi e \sigma^2}. \tag{3.17}$$

По аналогии с формулами для дискретного источника количество информации, содержащееся в одном непрерывном отсчете процесса $Y(t)$ относительно отсчета процесса $X(t)$, определяется формулой

$$I(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w_2(x, y) \log \frac{w_2(x, y)}{w_1(x)\, w_1(y)}\, dx\, dy. \tag{3.18}$$

Здесь $w_2(x, y)$ — совместная плотность вероятности процессов $X(t)$ и $Y(t)$.

Величину $I(X, Y)$ можно представить так:

$$I(X, Y) = h(X) - h(X/Y) = h(Y) - h(Y/X). \tag{3.19}$$

Здесь $h(X)$, $h(Y)$ — соответственно дифференциальная энтропия на отсчет процесса $X(t)$ и $Y(t)$;

$$h(X/Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w_2(x, y) \log w_1(x/y)\, dx\, dy \tag{3.20}$$

— условная дифференциальная энтропия отсчета $X(t)$ при известном отсчете $Y(t)$;

$$h(Y/X) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w_2(x,\ y)\log w_1(y/x)\,dxdy \qquad (3.21)$$

— условная дифференциальная энтропия отсчета $Y(t)$ при известном отсчете $X(t)$.

Эпсилон-энтропией $H_\varepsilon(X)$ непрерывного источника, или собственной информацией в одном отсчете процесса $X(t)$, будем называть минимальное количество информации, необходимое для воспроизведения сигнала $X(t)$ по сигналу $X'(t)$ с допустимой дисперсией ошибки $\sigma^2{}_u$:

$$H_\varepsilon(X/X') = \min I(X,\ X') = h(X/X') - \log\sqrt{2\pi e \sigma_u^2}, \qquad (3.22)$$

$H_\varepsilon(X/X')$ — это эпсилон-энтропия на один отсчет при условии, что отсчеты сигнала фиксированы; $h(X/X')$ — дифференциальная энтропия отсчета сигнала при условии, что отсчеты сигнала фиксированы.

Если источник выдает независимые отсчеты непрерывного сообщения дискретно во времени, то его эпсилон-производительность

$$H_\varepsilon(X/X') = v_\text{и} H_\varepsilon(X/X') = v_\text{и}\left[h(X/X') - \log\sqrt{2\pi e \sigma_u^2}\right], \qquad (3.23)$$

где v_u — число отсчетов в единицу времени.

При непрерывном времени

$$H_\varepsilon(X/X') = 2F_\text{c}\left[h(X/X') - \log\sqrt{2\pi e \sigma_u^2}\right]. \qquad (3.24)$$

Избыточность непрерывного стационарного источника

$$\rho_\text{и} = 1 - \frac{H_\varepsilon(X/X')}{H_\varepsilon(X)_\text{макс}}. \qquad (3.25)$$

Задачи

3.3.1. Показать, что количество информации, содержащееся в одном отсчете непрерывного сообщения, создаваемого стационарным источником без памяти при абсолютно точном его воспроизведении, равно ∞.

3.3.2. Показать, что дифференциальная энтропия нормального случайного процесса с дисперсией σ^2 не зависит от его математического ожидания и равна $h(X) = \log \sqrt{2\pi e \sigma^2}$.

3.3.3. Показать, что условная дифференциальная энтропия стационарного нормального случайного процесса $h(X/X_{\text{пр}})$, отсчет которого зависит только от одного предшествующего отсчета (модель марковского процесса с дискретным временем), определяется формулой

$$h(X/X_{\text{пр}}) = \log \sqrt{2\pi e \sigma^2 (1 - R^2)},$$

где $0 \leqslant R \leqslant 1$ — коэффициент корреляции соседних отсчетов.

3.3.4. Нормальный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 = 4$ мВт проходит через линейный усилитель с коэффициентом усиления $K = 100$. Определить приращение дифференциальной энтропии выходного сигнала по сравнению с входным.

3.3.5. Сравнить дифференциальные энтропии нормального процесса и процесса, равномерно распределенного на интервале $(-a, a)$, если их дисперсии одинаковы.

3.3.6. По каналу связи передается сигнал $X(t)$, представляющий собой нормальный случайный процесс с нулевым средним значением и дисперсией $\sigma^2{}_x = 4$ мВт. В канале действует независимый с сигналом нормальный шум $U(t)$ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2{}_u = 1$ мВт. Найти дифференциальную энтропию входного и выходного сигналов, а также условные дифференциальные энтропии $h(X/Y)$ и $h(Y/X)$.

3.3.7. Показать, что эпсилон-энтропия непрерывного источника определяется соотношением $H_\varepsilon(X) = h(X) - \log \sqrt{2\pi e \sigma^2{}_u}$ при фиксированной дисперсии шума воспроизведения.

3.3.8. Показать, что максимально возможное значение эпсилон-энтропии при заданной средней мощности сигнала $P_{\text{с}}$

$$H_\varepsilon(X)_{\text{макс}} = \frac{1}{2} \log \frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}},$$

где $P_{\text{ш}}$ — средняя мощность шума воспроизведения (канала).

3.3.9. Показать, что при фиксированных средних мощностях сигнала $P_{\text{с}}$ и шума воспроизведения $P_{\text{ш}}$ максимально возможная эпсилон-производительность источника определяется соотношением $H'_\varepsilon(X)_{\text{макс}} = \frac{v_\text{и}}{2}\log\frac{}{P_\text{ш}}$ при дискретном времени и $H'_\varepsilon(X)_{\text{макс}} = F_\text{c}\log\frac{P_\text{c}}{P_\text{ш}}$ при непрерывном времени.

3.3.10. Непрерывный сигнал непрерывного времени $X(t)$ на выходе источника имеет равномерное распределение с дисперсией $\sigma^2=3$ Вт. Найти эпсилон-производительность источника, если полоса сигнала $F_\text{c}=3100$ Гц, а дисперсия шума воспроизведения $\sigma^2_\text{и}=0{,}05$ Вт. На сколько изменится эпсилон-производительность источника, если он начнет выдавать сигнал с такими же параметрами, но с нормальным распределением?

3.3.11. Показать, что при заданной мощности шума воспроизведения информационный объем сигнала не может превысить величину

$$V_\text{c}^\text{и} = F_\text{c} T_\text{c} \log\frac{P_\text{c}}{P_\text{ш}}.$$

3.3.12. Найти избыточность источника, выдающего непрерывное сообщение с равномерным распределением и независимыми отсчетами при $P_\text{c}=10$ мВт, если отношение *сигнал/шум* в канале равно 10.

3.3.13. Определить избыточность непрерывного гауссовского источника с памятью при отношении *сигнал/шум* воспроизведения, равном 10, и значения коэффициента корреляции $R=0{,}01;\ 0{,}1;\ 0{,}5;\ 0{,}8;\ 0{,}95$.

Решения и ответы

Р.3.3.1. Рассмотрим сечение случайного процесса $X(t)$, предположив, что процесс в этом сечении имеет плотность вероятности $w_1(x)$. Разделим область изменений X на дискретные уровни x_i с малым интервалом Δx между ними. Вероятность того, что значение X лежит в интервале $(x_i,\ x_i+\Delta x)$, приближенно равна $p_i = w_1(x_i)\Delta x$. Будем считать, что отдельные отсчеты случайного сигнала $X(t)$ независимы, а их распределение не зависит от времени (стационарный источник без памяти). Тогда согласно (3.3) можно записать выражение для энтропии на один отсчет квантованного сигнала

$$H_{\Delta x}(X) = -\sum_i w_1(x_i)\Delta x \log[w_1(x_i)\Delta x] =$$

$$= -\sum_i w_1(x_i)\log[w_1(x_i)\Delta x] - \sum_i w_1(x_i)\Delta x\log\Delta x.$$

Чтобы непрерывный отсчет воспроизвести абсолютно точно, необходимо, чтобы $\Delta x \to 0$. Заменив тогда суммы соответствующими интегралами, найдем энтропию одного отсчета непрерывного сигнала

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} w_1(x) \log w_1(x)\, dx - \lim_{\Delta x \to 0} \log \Delta x \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x)\, dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} w_1(x) \log w_1(x)\, dx - \lim_{\Delta x \to 0} \log \Delta x.$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \log \Delta x = -\infty$, $H(X) = \infty$. Полученный результат означает, что один непрерывный отсчет сигнала мог бы перенести бесконечно много информации, если была бы возможность воспроизвести его абсолютно точно. К сожалению, в реальных каналах этой возможности нет.

Р.3.3.2. Подставим в ф-лу (3.16) выражение плотности вероятности нормального случайного процесса:

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}\right] \log \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\right.$$

$$\left.-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}\right] dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}\right]\left[-\right.$$

$$\left.-\log\sqrt{2\pi\sigma^2} - \frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2} \log e\right] dx.$$

Вводя новую переменную $(x - m_x)/\sigma$ и интегрируя, получаем

$$h(X) = \log\sqrt{2\pi e \sigma^2}.$$

Следовательно, величина $h(X)$ не зависит от m_x.

Р.3.3.3. Условная дифференциальная энтропия может быть определена по формуле

$$h(X/X_{\text{пр}}) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w_2(x, x_{\text{пр}}) \log w_1(x/x_{\text{пр}})\, dx\, dx_{\text{пр}}.$$

Согласно [5, 22]

$$w_1(x/x_{\text{пр}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1-R^2)}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2(1-R^2)}(x - x_{\text{пр}}R)^2\right];$$

$$w_2(x, x_{\text{пр}}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-R^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2(1-R^2)}(x^2+x_{\text{пр}}^2 - \right.$$

$$\left. - 2Rx\,x_{\text{пр}})\right].$$

Подставляя эти выражения в соотношение для условной дифференциальной энтропии, получаем

$$h(X/X_{\text{пр}}) = -\frac{1}{2\pi\sigma^2(1-R^2)} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{x^2+x_{\text{пр}}^2-2R\,x\,x_{\text{пр}}}{2\sigma^2(1-R^2)}\right] \times$$

$$\times\left[-\log\sqrt{2\pi\sigma^2(1-R^2)} - \frac{1}{2\sigma^2(1-R^2)}(xR - \right.$$

$$\left. - x_{\text{пр}})^2 \log e\right] dx\,dx_{\text{пр}}.$$

После простых преобразований имеем

$$h(X/X_{\text{пр}}) = \log\sqrt{2\pi e\sigma^2(1-R^2)}\,.$$

Обратим внимание на то, что с ростом коэффициента корреляции условная дифференциальная энтропия уменьшается.

Р.3.3.4. Очевидно, что входной и выходной процессы связаны между собой соотношением $Y(t)=KX(t)$. Выходной процесс $Y(t)$ имеет нормальное распределение с дисперсией $\sigma^2{}_y = K^2\sigma^2{}_x$.

Приращение дифференциальной энтропии

$$\Delta h = h(y) - h(x) = \log\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \log K.$$

При $K=100$ $\Delta h = 6{,}64$ бит/отсчет.

Полученный результат показывает, что численное значение дифференциальной энтропии зависит от масштаба измерения.

Р.3.3.5. Согласно Р.3.3.2 дифференциальная энтропия нормального процесса $h(X_1) = \log\sqrt{2\pi e\sigma^2}$.

Найдем дифференциальную энтропию процесса с равномерным распределением

$$h(X_2) = -\int\limits_{-a}^{a}\frac{1}{2a}\log\frac{1}{2a}\,dx = \log 2a.$$

Дисперсия равномерно распределенного процесса равна σ^2 при $a=\sigma\sqrt{3}$. Следовательно, дифференциальная энтропия равномерно распределенного процесса

$$h(X_2) = \log\sqrt{12\sigma^2}.$$

При заданной дисперсии σ^2 дифференциальная энтропия нормального процесса больше дифференциальной энтропии равномерно распределенного процесса на

$$\Delta h = \log\sqrt{2\pi e\sigma^2} - \log\sqrt{12\sigma^2} = \log\sqrt{\frac{\pi e}{6}} \approx$$

$$\approx 0{,}3 \text{ бит/отсчет.}$$

Этот результат не зависит от величины дисперсии σ^2.

Р.3.3.6. Выходной сигнал $Y(t)=X(t)+U(t)$. Так как $X(t)$ и $U(t)$ независимы и имеют нормальное распределение, $Y(t)$ также будет распределен по нормальному закону с дисперсией $\sigma^2{}_y=\sigma^2{}_x+\sigma^2{}_u$. В соответствии с Р.3.3.2 дифференциальные энтропии входного и выходного сигналов будут равны:

$$h(X) = \log\sqrt{2\pi e\sigma_x^2} = 3{,}05 \text{ бит/отсчет;}$$

$$h(Y) = \log\sqrt{2\pi e(\sigma_x^2+\sigma_u^2)} = 3{,}21 \text{ бит/отсчет.}$$

Условная дифференциальная энтропия отсчета $Y(t)$ при известном $X(t)$ определится энтропией шума в канале. Следовательно,

$$h(Y/X) = \log\sqrt{2\pi e\sigma_u^2} = 2{,}05 \text{ бит/отсчет.}$$

Будем теперь искать условную дифференциальную энтропию отсчета $X(t)$ при известном отсчете $Y(t)$ согласно (3.20):

$$h(X/Y) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_1(x)\, w_1(y/x) \log\frac{w_1(x)\, w_1(y/x)}{w_1(y)}\, dx\, dy.$$

Осуществив несложные преобразования и приняв во внимание, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_1(x)\, w_1(y/x)\, dx = w_1(y),$$

получим

$$h(X/Y) = h(X) + h(Y/X) - h(Y) =$$

$$= \log\sqrt{2\pi e\frac{\sigma_x^2\sigma_u^2}{\sigma_u^2+\sigma_x^2}} = 1{,}89 \text{ бит/отсчет.}$$

Р.3.3.7. По определению

$$H_\varepsilon(X) = \min I(X,\ X') = h(X) - \max h(X/X').$$

Поскольку $X(t) = X'(t) - U(t)$, то условная дифференциальная энтропия $h(X/X')$ при заданном сигнале $X'(t)$ полностью определяется шумом воспроизведения (канала) $U(t)$. Поэтому $\max h(X/X') = \max h(U)$. Если шум воспроизведения $U(t)$ имеет фиксированную дисперсию $\sigma^2{}_u$, то $\max h(U)$ достигается при нормальном распределении случайной величины U:

$$\max h(U) = \log \sqrt{2\pi e \sigma_u^2}.$$

Следовательно, $H_\varepsilon(X) = h(X) - \log\sqrt{2\pi e \sigma^2{}_u}$.

Р.3.3.8. Максимум эпсилон-энтропии непрерывного сигнала будет достигаться при $\max h(X)$. При заданной средней мощности сигнала $P_с = \sigma^2{}_x \max h(X) = \log\sqrt{2\pi e P_с}$ и достигается при нормальном распределении сигнала $X(t)$.

Следовательно,

$$H_\varepsilon(X)_{макс} = \log\sqrt{2\pi e P_с} - \log\sqrt{2\pi e P_ш} = \frac{1}{2}\log\frac{P_с}{P_ш},$$

где $P_ш = \sigma^2{}_u$ — средняя мощность шума воспроизведения.

Р.3.3.9. Согласно (3.23) при дискретном времени (с шагом квантования во времени $\Delta t = 1/v_и$) эпсилон-производительность

$$H'_\varepsilon(X) = v_и\left[h(X) - \log\sqrt{2\pi e \sigma_u^2}\right].$$

Очевидно, что $H'_\varepsilon(X)$ будет максимальна, когда $h(X)$ максимально. Но при заданной дисперсии (средней мощности $P_с$) это достигается при нормальном распределении процесса $X(t)$ (см. Р.3.3.8).

С учетом (3.17) имеем

$$H'_\varepsilon(X)_{макс} = v_и\frac{1}{2}\log\frac{\sigma_x^2}{\sigma_u^2} = \frac{v_и}{2}\log\frac{P_с}{P_ш}.$$

При непрерывном времени, полагая, что $v_и = 2F_с$, можно пользоваться формулой

$$H'_\varepsilon(X)_{макс} = F_с\log\frac{P_с}{P_ш},$$

где $F_с$ — полоса частот сигнала.

Р.3.3.10. Используя результат задачи 3.3.5 и ф-лу (3.24), можно записать для равномерно распределенного процесса

$$H'_\varepsilon(X)_\text{р} = 2F_\text{с}\left(\log\sqrt{12\sigma_x^2} - \log\sqrt{2\pi e\sigma_u^2}\right) =$$

$$= 2\cdot 3{,}1\cdot 10^3\left(\log\sqrt{36} - \log\sqrt{0{,}1\,\pi e}\right) = 16{,}68\cdot 10^3 \text{ бит/с.}$$

Для нормального процесса с полосой $F_\text{с} = 3{,}1\cdot 10^3$ Гц и дисперсией $\sigma^2{}_x = 3$ Вт при том же шуме воспроизведения ($\sigma^2{}_u = 0{,}05$ Вт) получим

$$H'_\varepsilon(X)_\text{н} = 2\cdot 3{,}1\cdot 10^3\left(\log\sqrt{6\pi e} - \log\sqrt{0{,}1\,\pi e}\right) =$$

$$= 18{,}3\cdot 10^3 \text{ бит/с.}$$

Р.3.3.11. Назовем информационным объемом непрерывного сигнала величину

$$V_\text{с}^\text{и} = 2F_\text{с}T_\text{с}H_\varepsilon(X),$$

т. е. произведение эпсилон-производительности $2F_\text{с}H_\varepsilon(X)$ на длительность сигнала $T_\text{с}$.

При фиксированной полосе $F_\text{с}$ и длительности $T_\text{с}$ максимум $V_\text{с}{}^\text{и}$ будет иметь место при максимальной величине эпсилон-энтропии (см. Р.3.3.8)

$$H_\varepsilon(X) = \frac{1}{2}\log\frac{P_\text{с}}{P_\text{ш}},$$

причем этот максимум достигается лишь при нормальном распределении сигнала $X(t)$, имеющего среднюю мощность $P_\text{с}$.

Следовательно, при фиксированной величине $P_\text{ш}$

$$\max V_\text{с}^\text{и} = F_\text{с}T_\text{с}\log\frac{P_\text{с}}{P_\text{ш}}.$$

Обратим внимание на то, что эта величина совпадает с физическим объемом сигнала (см. § 1.5), если пикфактор сигнала по мощности $\Pi^2 = 1$.

Р.3.3.12. Избыточность источника согласно (3.25)

$$\rho_\text{и} = 1 - \frac{H_\varepsilon(X)}{H_\varepsilon(X)_\text{макс}}.$$

Используя Р.3.3.7 и Р.3.3.8, можно записать

$$\rho_\text{и} = 1 - \frac{h(X) - \log\sqrt{2\pi e P_\text{ш}}}{\dfrac{1}{2}\log\dfrac{P_\text{с}}{P_\text{ш}}}.$$

Находим мощность шума воспроизведения (шума в канале)

$$P_{ш} = \frac{P_{с}}{10} = 1 \text{ мВт}.$$

Учитывая Р.3.3.5, при равномерном распределении сигнала $X(t)$ имеем

$$\rho_{и} = 1 - \frac{\log \sqrt{12 P_{с}} - \log \sqrt{2 \pi e P_{ш}}}{\frac{1}{2} \log \frac{P_{с}}{P_{ш}}} = 0{,}155.$$

Р.3.3.13. Используя соотношения (3.25) и (3.24) и учитывая Р.3.3.3, Р.3.3.7 и Р.3.3.8, получаем

$$\rho_{и} = 1 - \frac{\frac{1}{2} \log \frac{P_{с}}{P_{ш}} (1 - R^2)}{\frac{1}{2} \log \frac{P_{с}}{P_{ш}}}.$$

Если $P_{с}/P_{ш} = 10$, то при $R = 0{,}01$ $\rho_{и} \approx 0$; при $R = 0{,}1$ $\rho_{и} = 0{,}004$; при $R = 0{,}5$ $\rho_{и} = 0{,}13$; при $R = 0{,}8$ $\rho_{и} = 0{,}445$; при $R = 0{,}95$ $\rho_{и} \approx 1$.

3.4. Количество и скорость передачи информации по непрерывному каналу. Пропускная способность непрерывного канала

Если на вход непрерывного канала поступил сигнал $s(t)$, а в канале действует аддитивная помеха $U(t)$ так, что принимаемое колебание $Z(t) = s(t) + U(t)$, то условная дифференциальная энтропия $h(Z/S) = h(U)$ — дифференциальной энтропии на один отсчет помехи. Поэтому

$$I(S, Z) = h(Z) - h(U). \tag{3.26}$$

Скорость передачи информации по непрерывному каналу с дискретным временем

$$I'(S, U) = v_{к} [h(S) - h(S/Z)] = v_{к} [h(Z) - h(Z/S)], \tag{3.27}$$

где $v_{к} = 2F_{к}$ — число отсчетов сигнала, передаваемое в одну секунду по каналу с полосой $F_{к}$.

Пропускной способностью C непрерывного канала с заданным шумом и $v_{к}$ будем называть предельное значение скорости передачи информации (3.27), достигаемое при вариации всевозможных источников на входе.

При аддитивном шуме в канале

$$C = v_{к} \max [h(Z) - h(U)]. \tag{3.28}$$

Применительно к непрерывному источнику основную теорему оптимального кодирования К. Шеннона можно сформулировать так: если эпсилон-производительность источника меньше пропускной способности канала $H'_\varepsilon(A) < C$, то существует способ кодирования и декодирования, при котором с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, средняя мощность шума воспроизведения меньше заданной величины $P_{ш}$. Если $H'_\varepsilon(A) > C$, такого способа нет.

Максимальный объем информации, который может быть передан по непрерывному каналу с пропускной способностью C

$$V_{к}^{и} = T_{к}C, \tag{3.29}$$

где $T_{к}$ — время использования канала.

Задачи

3.4.1. По каналу связи без памяти передается сигнал $s(t)$, представляющий собой нормальный случайный процесс с нулевым средним значением, дисперсией $\sigma^2_s = 8$ мВт и равномерным энергетическим спектром G_0 в полосе частот канала $F_{к} = 3100$ Гц. В канале действует независимая от сигнала флуктуационная помеха типа «белый шум» с энергетическим спектром $G_{ш} = 3{,}22 \cdot 10^{-7}$ Вт/Гц, нормальным распределением и нулевым средним значением.

Определить среднее на один отсчет сигнала количество информации, переданное по каналу.

3.4.2. С какой скоростью передается информация по каналу, если на его вход поступает $v_{к} = 100$ независимых отсчетов сигнала в секунду. Сигнал $S(t)$ распределен по нормальному закону с $m_s = 0$ и $\sigma^2_s = 2{,}8$ Вт. В канале действует аддитивный нормальный шум с $m_u = 0$ и $\sigma^2_u = 0{,}4$ Вт.

3.4.3. Показать, что при заданном ансамбле входных сигналов и фиксированной дисперсии помехи скорость передачи информации по непрерывному каналу будет иметь наименьшее значение при нормальном шуме в канале.

3.4.4. Показать, что пропускная способность гауссовского канала непрерывного времени не может превысить величину

$$C = F_{к} \log\left(1 + \frac{P_{с}}{P_{ш}}\right),$$

где $F_{к}$ — полоса канала; $P_{с}$ и $P_{ш}$ — фиксированные средние мощности сигнала и шума в канале, которые считаются независимыми.

3.4.5. Определить максимально возможную величину пропускной способности гауссовского канала при неограниченной полосе.

3.4.6. Показать, что для передачи одной единицы информации по каналу с шумами сигнал должен иметь энергию $E \geqslant 0{,}69\, G_{ш}$.

3.4.7. Определить максимально возможный объем информации, который может быть передан по гауссовскому каналу. Показать, что соотношение между физическими объемами сигнала и канала $V_с \leqslant V_к$ следует при равных длительностях сигналов источника и канала $(T_с = T_к)$ из основной теоремы кодирования Шеннона.

3.4.8. По гауссовскому каналу связи с полосой $f_0 \pm 0{,}5F$ передается сигнал $s(t)$, имеющий спектральную плотность мощности $G_0(f) = A \exp[-\beta^2 (f - f_0)^2]$ $(\beta = 1{,}83 \cdot 10^{-3}$ с, $A = 48 \cdot 10^{-9}$ Вт/Гц, $F = 3{,}1 \cdot 10^3$ Гц). В канале действует «белый шум» со спектральной плотностью мощности $G_ш = 10^{-9}$ Вт/Гц.

Определить максимально возможный объем информации, который может быть передан по данному каналу, если время использования канала $T_к = 1$ ч.

3.4.9. Чему равна пропускная способность канала, если средняя мощность сигнала 1 мкВт, а помехой является тепловой шум приемного устройства с полосой 10 кГц. Приемник работает при температуре 20°С.

3.4.10. Определить величину отношения сигнал/шум в канале, при котором дискретный источник может выдавать символы со скоростью $v_и = 2F_к$ (так называемый предел Найквиста), если осуществляется оптимальное кодирование по Шеннону.

Решения и ответы

Р.3.4.1. Поскольку спектр равномерный, то отсчеты входного сигнала и помехи, а следовательно, и сигнала на выходе независимы. Согласно (3.26) $I(S, Z) = h(Z) - h(Z/S) = h(S) - h(S/Z)$.

Подставив сюда выражения для $h(S)$, $h(S/Z)$, $h(Z)$ и $h(Z/S)$ из Р.3.3.6, получим

$$I(S, Z) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_u^2}\right) = 1{,}58 \text{ бит/отсчет}.$$

Р3.4.2. В соответствии с (3.27) $I(S, Z) = v_к I(S, Z)$. Подставив сюда выражение $I(S, Z)$ из Р.3.4.1, получим

$$I'(S, Z) = v_к \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_u^2}\right) = 1500 \text{ бит/с}.$$

Р.3.4.3. Согласно (3.27) при аддитивном шуме в канале

$$I'(S,\ Z) = v_{\text{к}}\,[h(S) - h(U)].$$

Очевидно, что минимальная скорость передачи информации будет определяться соотношением $\min I'(S, Z) = v_{\text{к}} \min [h(Z) - h(U)]$.

Если ансамбль входных сигналов фиксирован, то $\min [h(Z) - h(U)]$ будет иметь место при $\max h(U)$. Если дисперсия шума фиксирована, то $\max h(U)$ будет при нормальном распределении шума, причем $\max h(U) = \log \sqrt{2\pi e \sigma^2_u}$. Следовательно, при указанных условиях скорость передачи информации будет наименьшей и равной

$$I'(S,\ Z) = v_{\text{к}} \left[h(Z) - \log \sqrt{2\pi e \sigma^2_u}\right].$$

Р.3.4.4. Согласно (3.28) $C = \max I'(S, Z)$. Как показано в Р.3.4.3, для гауссовского канала $I'(S, Z) = v_{\text{к}} [h(Z) - \log \sqrt{2\pi e P_{\text{ш}}}]$.

Отсюда следует, что пропускная способность гауссовского канала

$$C = v_{\text{к}} \max \left[h(Z) - \log \sqrt{2\pi e P_{\text{ш}}}\right],$$

Если дисперсия шума фиксирована, то

$$C = v_{\text{к}} \left[\max h(Z) - \log \sqrt{2\pi e P_{\text{ш}}}\right].$$

Дисперсия выходного сигнала $\sigma^2_z = P_{\text{с}} + P_{\text{ш}}$, так как сигнал и шум считаются независимыми. При фиксированной дисперсии σ^2_z $\max h(Z)$ будет иметь место при нормальном распределении процесса $Z = S + U$, а следовательно, при нормальном распределении входного сигнала $S(t)$. В этом случае

$$C = v_{\text{к}} \left(\log \sqrt{2\pi e \sigma^2_z} - \log \sqrt{2\pi e P_{\text{ш}}}\right) = \frac{v_{\text{к}}}{2} \log\left(1 + \frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}}\right).$$

Полагая $v_{\text{к}} = 2F_{\text{к}}$ (в соответствии с теоремой Котельникова), можно написать выражение для пропускной способности гауссовского канала непрерывного времени

$$C = F_{\text{к}} \log\left(1 + \frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}}\right).$$

Р.3.4.5. Воспользуемся формулой для пропускной способности гауссовского канала, полученной в Р.3.4.4. Полагая, что $P_ш = F_к G_ш$, можно записать

$$C = F_к \log\left(1 + \frac{P_с}{F_к G_ш}\right) = F_к \log e \ln\left(1 + \frac{P_с}{F_к G_ш}\right).$$

Найдем предел C при $F_к \to \infty$:

$$C_\infty = \lim_{F_к \to \infty} C = \log e \lim_{F_к \to \infty} F_к \ln\left(1 + \frac{P_с}{F_к G_ш}\right).$$

Поскольку $\ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$, можем записать, что

$$C_\infty = \log e F_к \frac{P_с}{F_к G_ш} = \frac{P_с}{G_ш} \log e.$$

Легко показать, что пропускная способность гауссовского канала монотонно растет при расширении полосы канала $F_к$ и асимптотически стремится к величине C_∞.

Р.3.4.6. Допустим, что сообщение передавалось в течение времени T. Так как скорость передачи информации по каналу с любой полосой не больше, чем C_∞, можем записать, что количество переданной по каналу информации удовлетворяет неравенству $TI'(S, Z) \leqslant TC_\infty$ или с учетом Р.3.4.5 $TI'(S, Z) \leqslant \log e\, T \frac{P_с}{\sigma}$.

Отсюда следует, что для передачи $TI'(S, Z) = 1$ бит информации необходимо, чтобы сигнал имел энергию $P_с T$, удовлетворяющую условию

$$E = P_с T \geqslant \frac{G_ш}{\log_2 e} = G_ш \ln 2 = 0{,}69\, G_ш.$$

Р.3.4.7. При заданном отношении *сигнал/шум* в канале пропускная способность гауссовского канала $C = F_к \log\left(1 + \frac{P_с}{P_ш}\right)$ и, следовательно,

$$V_к^и = T_к F_к \log\left(1 + \frac{P_с}{P_ш}\right).$$

Если $P_с/P_ш \gg 1$ и пикфактор сигнала $P_{макс}/P_с = \Pi^2 = 1$, то

$$V_к^и = F_к T_к \log \frac{P_с}{P_ш} = V_к,$$

т. е. информационный и физический объемы канала (см. § 1.5) совпадают.

Для передачи информации без потерь должно выполняться соотношение $V^{и}_{с} \leqslant V^{и}_{к}$, равносильное при оговоренных условиях требованию $V_с \leqslant V_к$ между физическим объемом сигнала и канала. Для гауссовского источника и канала при этом выполняется неравенство

$$T_с F_с \log \frac{P_с}{P_ш} \leqslant T_к F_к \log \frac{P_с}{P_ш}.$$

Так как $F_с \log \frac{P_с}{P_ш} = H'_{\varepsilon}(S)$, то при равенстве $T_с = T_к$ следует, что $V_с \leqslant V_к$ при $H'_{\varepsilon}(S) \leqslant C$, т. е. условие согласования физических объемов сигнала и канала следует из основной теоремы кодирования Шеннона.

Р.3.4.8. Средняя мощность заданного сигнала

$$P_с = A \int\limits_{f_0-0,5\,F}^{f_0+0,5\,F} \exp\left[-\beta^2 (f-f_0)^2\right] df = 46,5\cdot 10^{-6} \text{ Вт}.$$

Средняя мощность шума в канале $P_ш = FG_ш = 3,1\cdot 10^{-6}$ Вт. Пропускная способность канала

$$C = F \log_2\left(1 + \frac{P_с}{P_ш}\right) = 1,24\cdot 10^4 \text{ бит/с}.$$

Теперь по ф-ле (3.29) находим

$$V^{к}_{и} = CT_к = 1,24\cdot 10^4\cdot 3,6\cdot 10^3 = 4,46\cdot 10^7 \text{ бит}.$$

Р.3.4.9. Мощность теплового шума может быть определена по формуле $P_ш = 4kTF$, где T — абсолютная температура приемного устройства; k — постоянная Больцмана, равная $1,37\cdot 10^{-23}$ Дж/град.

В данном случае $F = 10$ кГц, $T = 273 + t°\text{C} = 293°$. Следовательно, $P_ш = 4\cdot 1,37\cdot 10^{-23}\cdot 293 \approx 1,64\cdot 10^{-16}$ Вт. При средней мощности сигнала 10^{-6} Вт

$$C = 10^4 \log\left(1 + \frac{10^{-6}}{1,64\cdot 10^{-16}}\right) \approx 3,26\cdot 10^5 \text{ бит/с}.$$

Р.3.4.10. Из условия основной теоремы кодирования Шеннона $H'(A) < C$ следует, что в гауссовском канале возможно оптимальное кодирование только тогда, когда источник сообщения выдает за одну секунду

$$v_и < \frac{F_к \log_2\left(1 + \frac{P_с}{P_ш}\right)}{H(A)}$$

символов.

Если источник выдает двоичные равновероятные и независимые символы, то

$$v_{\text{и}} < F_{\text{к}} \log_2\left(1 + \frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}}\right).$$

Очевидно, что условие $v_{\text{и}} < 2F_{\text{к}}$ может быть выполнено при $P_{\text{с}}/P_{\text{ш}} < 3$. Если же $P_{\text{с}}/P_{\text{ш}} \gg 3$, то скорость выдачи символов источником можно сделать значительно больше $2F_{\text{к}}$, т. е. при $P_{\text{с}}/P_{\text{ш}} \gg 3$ предел Найквиста можно превысить. Следует, однако, отметить, что на практике этот результат пока не достигнут.

Глава 4

ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОДИРОВАНИЯ

4.1. Представление кодов. Свойства кодов без избыточности

Кодирование (в узком смысле) — сопоставление дискретному сообщению a_i ($i=1, 2, \ldots, K$) определенной последовательности кодовых символов, выбираемых из конечного множества элементарных символов $\{b_i\}$ ($i=1, 2, 3, \ldots, m$). Если число разрядов во всех кодовых комбинациях $n=\text{const}$, то код называется равномерным. Число кодовых комбинаций равномерного кода

$$N = m^n \tag{4.1}$$

(m — основание кода; n — число разрядов в кодовой комбинации).

Каждую букву из ансамбля $\{a_i\}$ с объемом K можно закодировать при

$$N = m^n \geqslant K. \tag{4.2}$$

При кодировании отдельным символам источника сообщений $\{a_i\}$ удобно сопоставить целые числа от 0 до $K-1$.

Любое число M может быть представлено в системе счисления с основанием m:

$$M = b_n m^n + b_{n-1} m^{n-1} + \ldots + b_2 m^2 + b_1 m^1 + b_0 m^0. \tag{4.3}$$

Коэффициенты b_i принимают значения от 0 до $m-1$. Их совокупность и есть кодовая комбинация для символа a_i с номером M_i:

$$a_i \to M_i \to (b_n b_{n-1} \ldots b_i b_0).$$

Код, для которого $m^n = K$, называется примитивным (код без избыточности).

Избыточность кода можно оценить соотношением

$$\rho_{\text{к}} = 1 - \frac{v_{\text{п}}(1 - \rho_{\text{и}}) \log K}{v_{\text{к}} \log m}, \tag{4.4}$$

где $\rho_и$ — избыточность источника; $v_и$ — скорость выдачи символов источником; $v_к$ — скорость выдачи символов кодером.

Избыточность равномерного m-позиционного n-разрядного кода при $\rho_и=0$

$$\rho_к = 1 - \frac{\log K}{n \log m}, \qquad (4.5)$$

где $n=v_к/v_и$ — число символов кода на один символ источника.

Особый класс образуют статистические коды. Эти коды являются неравномерными. Длина кодовой комбинации таких кодов зависит от вероятности выбора соответствующей буквы алфавита: наиболее вероятным буквам сопоставляются короткие кодовые комбинации, а менее вероятным — более длинные (такое кодирование очень часто называют экономным, так как оно позволяет сократить среднюю длину кодовой комбинации).

Представителями статистических (экономных) кодов являются код Шеннона — Фано и код Хаффмена.

Средняя длина кодовых комбинаций экономного кода не может быть меньше величины $\bar{n}_{мин}$, которая согласно теореме Шеннона об оптимальном кодировании в каналах без шумов (см. § 3.2) $\bar{n}_{мин} = \frac{H\ (A)}{\log m} + \varepsilon$ (ε — сколь угодно малая величина).

Задачи

4.1.1. Источник сообщения выдает символы из ансамбля, имеющего объем $K=8$. Записать кодовые комбинации примитивного равномерного двоичного кода, соответствующие символам данного источника. Построить граф кода (кодовое дерево).

4.1.2. Дискретный источник выдает символы из ансамбля $\{a_i\}$ с объемом $K=10$. Какое минимальное число разрядов должны иметь кодовые комбинации равномерного двоичного кода, предназначенного для кодирования символов данного ансамбля? Записать кодовые комбинации.

4.1.3. Ансамбль дискретных символов $\{a_i\}$ с объемом $K=32$ имеет энтропию $H(A)=2$ бит/символ. Найти минимальное количество кодовых символов, которые необходимо израсходовать на один символ источника при кодировании в канале без шумов равномерным примитивным двоичным кодом и при оптимальном кодировании.

Какое избыточное количество символов по сравнению с оптимальным кодом приходится тратить на один символ источника при использовании равномерного примитивного двоичного кода?

4.1.4. Первичный непрерывный сигнал путем дискретизации во времени и квантования по уровню превращается в импульсную последовательность с числом уровней $K=128$. Каждый уровень кодируется равномерным двоичным кодом[1]. Найти число разрядов в кодовой комбинации при $\rho_к=0$, если отдельные отсчеты сигнала независимы. Чему будет равна избыточность кода, если число разрядов увеличить на 3?

4.1.5. Показать, что при использовании n-разрядного примитивного кода вероятность ошибочного декодирования кодовой комбинации не может быть сколь угодно малой при вероятности ошибочного приема элементарного символа p_0.

4.1.6. Определить вероятность ошибочного приема любого уровня квантованного сигнала при использовании КИМ с семиразрядным примитивным кодом ($n=7$) в симметричном канале без памяти, если вероятность ошибочного приема одного кодового символа $p_0 = 10^{-3}$.

4.1.7. Показать, что при кодировании равномерным кодом с основанием m букв источника, имеющего производительность $H'(A)$, число разрядов в кодовой комбинации не может быть меньше, чем

$$\bar{n}_{мин} = \frac{\log K}{\log m},$$

где K — объем алфавита источника; m — основание кода.

4.1.8. Некоторый дискретный источник выдает символы из ансамбля $\{a_i\}$ ($i=1, 2, ..., 9$) с вероятностями, приведенными в табл. 4.1.

ТАБЛИЦА 4.1

Символы	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
p_i	0,2	0,15	0,15	0,12	0,1	0,1	0,08	0,06	0,04

Закодировать символы данного ансамбля кодом Хаффмена. Построить граф кода и определить среднюю длину кодовой комбинации. Сравнить полученный результат с минимальной длиной кодовой комбинации при кодировании равномерным двоичным кодом. Показать, что код Хаффмена близок к оптимальному по Шеннону.

---

[1] Такой способ кодирования непрерывных сигналов называется кодово-импульсной модуляцией (КИМ); более подробно КИМ будет рассмотрена в гл. 6.

4.1.9. Закодировать двоичным кодом Шеннона—Фано ансамбль $\{a_i\}$ ($i=1, 2, 3, \ldots, 8$), если вероятность символов имеет значения, приведенные в табл. 4.2.

ТАБЛИЦА 4.2

Символ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Найти среднее число знаков в кодовой комбинации. Показать, что такой код близок к оптимальному по Шеннону.

Решения и ответы

Р.4.1.1. В соответствии с (4.2) число кодовых комбинаций должно удовлетворять условию $8=2^n$. Отсюда находим число разрядов $n=\log_2 8=3$.

Процедура кодирования и кодовые комбинации приведены в табл. 4.3.

ТАБЛИЦА 4.3

Символ	Число	Разложение числа по основанию 2	Кодовая комбинация
a_1	0	$0\cdot2^2+0\cdot2^1+0\cdot2^0$	0 0 0
a_2	1	$0\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0$	0 0 1
a_3	2	$0\cdot2^2+1\cdot2^1+0\cdot2^0$	0 1 0
a_4	3	$0\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0$	0 1 1
a_5	4	$1\cdot2^2+0\cdot2^1+0\cdot2^0$	1 0 0
a_6	5	$1\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0$	1 0 1
a_7	6	$1\cdot2^2+1\cdot2^1+0\cdot2^0$	1 1 0
a_8	7	$1\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0$	1 1 1

Граф кода приведен на рис. 4.1.

Р.4.1.2. Число разрядов в кодовой комбинации найдем из условия (4.2)

$$n=\log_2 10=3{,}32.$$

Так как число разрядов не может быть дробным, эту величину следует округлить до 4 (округление до

3 недопустимо, так как при этом число кодовых комбинаций кода $N=2^3=8$ будет недостаточно для кодирования всех 10 символов источника).

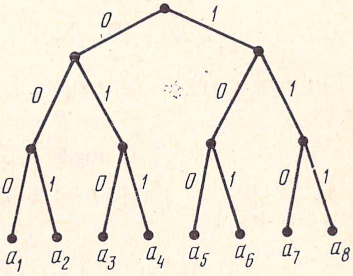


Рис. 4.1. Граф трехразрядного двоичного кода

Кодовые комбинации приведены в табл. 4.4.

ТАБЛИЦА 4.4

Символ	Число	Разложение числа по основанию 2	Кодовая комбинация
a_1	0	$0\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2^1+0\cdot2^0$	0 0 0 0
a_2	1	$0\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0$	0 0 0 1
a_3	2	$0\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2^1+0\cdot2^0$	0 0 1 0
b_4	3	$0\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0$	0 0 1 1
a_5	4	$0\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+0\cdot2^0$	0 1 0 0
a_6	5	$0\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0$	0 1 0 1
a_7	6	$0\cdot2^3+1\cdot2^3+1\cdot2^1+0\cdot2^0$	0 1 1 0
a_8	7	$0\cdot2^3+1\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0$	0 1 1 1
a_9	8	$1\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2^1+0\cdot2^0$	1 0 0 0
a_{10}	9	$1\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0$	1 0 0 1

Р.4.1.3. Согласно (4.1) при равномерном примитивном кодировании

$$\bar{n}_{\text{мин.п}}=\frac{\log K}{\log m}=\frac{\log 32}{\log 2}=5.$$

При оптимальном кодировании по Шеннону в канале без шумов

$$\bar{n}_{\text{мин }0}=\frac{H(A)}{\log m}=\frac{2}{\log 2}=2.$$

Следовательно, при примитивном двоичном равномерном кодировании в канале без шумов на каждый символ источника приходится тратить в данном случае

$n_{\text{мин.п}} - n_{\text{мин 0}} = 3$ избыточных символа по сравнению с оптимальным кодом.

Р.4.1.4. При независимых отсчетах сигнала $\rho_{\text{и}} = 0$. Согласно (4.5) можно записать

$$n = \frac{\log K}{(1 - \rho_{\text{и}}) \log m}.$$

В данном случае при $\rho_{\text{и}} = 0$

$$n = \frac{\log K}{\log 2} = \log_2 128 = 7.$$

Если число разрядов в кодовой комбинации увеличить до 10, то

$$\rho_{\text{к}} = 1 - \frac{\log 128}{10} = 0{,}3.$$

Р4.1.5. Кодовая комбинация n-разрядного примитивного кода будет декодирована правильно в том случае, если все n элементов кодовой комбинации приняты безошибочно. Вероятность этого события

$$p_{\text{прав}} = (1 - p_0)^n.$$

Вероятность ошибочного декодирования $p = 1 - (1 - p_0)^n$. Воспользовавшись формулой бинома Ньютона, получим

$$p = \sum_{i=1}^{n} C_n^i \, p_0^i.$$

Если $p_0 \ll 1$, то вероятность ошибочного декодирования кодовой комбинации $p \approx np_0$, т. е. имеет конечную величину.

Р.4.1.6. Вероятность ошибочного приема любого уровня квантованного сигнала при КИМ равна вероятности ошибочного приема кодовой комбинации, которая согласно Р.4.1.5 $p = 1 - (1 - p_0)^7$. Воспользовавшись формулой бинома Ньютона, можем записать

$$p = 1 - 1 + 7 p_0 + \frac{7 \cdot 6}{2} p_0^2 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3} p_0^3 + \ldots$$

При $p_0 \ll 1$ можно пренебречь слагаемыми высшего порядка малости и приближенно считать $p \approx 7 \cdot p_0 = 7 \cdot 10^{-3}$

Р.4.1.7. Если дискретный источник с объемом алфавита K выдает $v_{\text{и}}$ символ/с, то его производительность

$$H'(A) = v_{\text{и}} H(A) \leqslant v_{\text{и}} \log K.$$

Равенство в этом соотношении имеет место лишь при равновероятных и независимых символах источника. Если в канале нет шума и он позволяет передать $v_к$ кодовых символов в секунду, то пропускная способность такого канала (см. § 3.2) $C = v_к \log m$.

При использовании n-разрядного равномерного кода условием передачи без потери информации является выполнение неравенства $v_к \geqslant n v_и$, так как каждая «буква» источника требует n кодовых символов. Согласно (4.2) при примитивном кодировании $n \log m = \log K$.

Следовательно,

$$\bar{n} = \frac{v_к}{v_и} \geqslant \frac{\log K}{\log m}.$$

Отсюда следует, что минимальное число кодовых символов на «букву» при примитивном кодировании

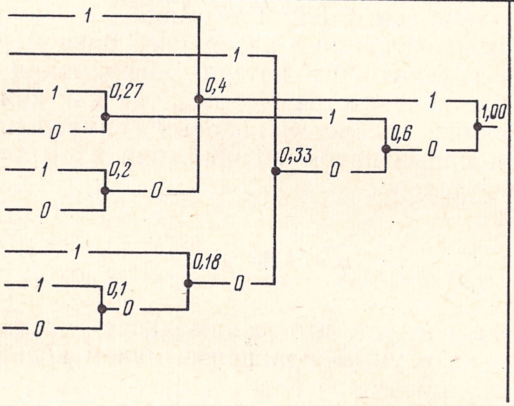
$$\bar{n}_{мин} = \frac{\log K}{\log m}.$$

Р.4.1.8. При кодировании по методу Хаффмена все символы источника располагают в порядке убывания вероятностей. Если несколько букв имеют одинаковые вероятности, их располагают рядом в произвольном порядке. Затем выбирают две буквы с наименьшими вероятностями и одной из них приписывают символ «0», а другой — символ «1» в качестве первого символа двоичного кода. Выбранные буквы объединяют в «промежуточную» букву, имеющую вероятность, равную сумме вероятностей выбранных букв. Затем в ансамбле оставшихся букв (вместе с промежуточной) вновь находят две с наименьшими вероятностями и поступают так же, как и на первом шаге. Эту процедуру осуществляют до тех пор, пока не будет исчерпан весь алфавит.

Процесс кодирования показан в табл. 4.5. Средняя длина кодовой комбинации данного кода $\bar{n} = \sum_{i=1}^{9} n_i p_i = 3{,}08$. Минимальная длина кодовой комбинации примитивного кода, которым можно закодировать данный алфавит,

$$\bar{n}_{мин.п} = \frac{\log K}{\log m} = 4.$$

ТАБЛИЦА 4.5

Символ	p_i	Граф кода Хаффмена	Код
a_1	0,2	 1 1 1 0,27 0,4 1 1,00 1 0 0,6 0 0,33 1 0,2 0 0 0 1 0,18 1 0,1 0 0 0	11
a_2	0,15		001
a_3	0,15		011
a_4	0,12		010
a_5	0,1		101
a_6	0,1		100
a_7	0,08		0001
a_8	0,06		00001
a_9	0,04		00000

При оптимальном двоичном кодировании в канале без шумов

$$\bar{n}_{\text{мин о}} = \frac{H(A)}{\log m} = H(A) = -\sum_{i=1}^{9} p_i \log p_i = 3{,}04.$$

Средняя длина кодовой комбинации кода Хаффмена отличается от средней длины оптимального кода на

$$\frac{3{,}08 - 3{,}04}{3{,}04} 100\% = 1{,}32\%,$$

что позволяет считать код Хаффмена близким к оптимальному коду.

Р.4.1.9. Кодирование по методу Шеннона—Фано осуществляется следующим образом. Все буквы записываются в порядке убывания их вероятностей. Затем вся совокупность букв разбивается на две примерно равновероятные группы. Всем буквам верхней группы приписывается первый кодовый символ «1», а буквам нижней группы — символ «0».

Затем каждая группа аналогичным образом разбивается на подгруппы по возможности с одинаковыми вероятностями, причем верхним подгруппам в обеих группах приписывается символ «1» (второй символ кодовой комбинации), а нижним — символ «0». Эта процедура осуществляется до тех пор, пока в каждой подгруппе не останется по одной букве. Процесс кодирования по Шеннону—Фано приведен в табл. 4.6.

ТАБЛИЦА 4.6

Буква	p_i	Разбиение				Кодовая комбинация
a_1	$\frac{1}{4}$	1	1			11
a_2	$\frac{1}{4}$		0			10
a_3	$\frac{1}{8}$	0	1	1		011
a_4	$\frac{1}{8}$			0		010
a_5	$\frac{1}{16}$		0	1	1	0011
a_6	$\frac{1}{16}$				0	0010
a_7	$\frac{1}{16}$			0	1	0001
a_8	$\frac{1}{16}$				0	0000

Средняя длина кодовой комбинации

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{8} n_i\, p_i = 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + 3\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \\ + 4\,\frac{4}{16} = 2{,}75.$$

При оптимальном двоичном кодировании

$$\bar{n} = H(A) = -\sum_{i=1}^{8} p_i \log p_i = 2{,}75.$$

Следовательно, в данном случае код Шеннона—Фано является оптимальным.

4.2. Корректирующие коды и их свойства

Корректирующими кодами называют коды, которые позволяют обнаруживать ошибки и исправлять ошибки и стирания, возникающие при передаче дискретных сообщений.

Для корректирующих кодов справедливо неравенство

$$N = m^n > K \tag{4.6}$$

(в дальнейшем будем рассматривать только двоичные коды: $m=2$). При этом часть кодовых комбинаций используется для кодирования (эти кодовые комбинации называются разрешенными, их число равно K), а другая часть при кодировании не используется. Число неиспользованнных при кодировании комбинаций, называемых запрещенными, равно $N - K$.

Если минимальное хеммингово расстояние (см. § 1.4) между разрешенными кодовыми комбинациями $d_{\text{мин}}$, то код позволяет обнаружить ошибку, когда в кодовой комбинации число ошибочно принятых символов удовлетворяет условию

$$q < d_{\text{мин}}. \tag{4.7}$$

Следовательно, максимальная кратность обнаруживаемых ошибок $q_0 = d_{\text{мин}} - 1$. Блочный корректирующий код исправляет ошибки, если их число

$$q < \frac{d_{\text{мин}}}{2}. \tag{4.8}$$

Максимальная кратность полностью исправляемых ошибок

$$q_{\text{и}} = \begin{cases} \dfrac{d_{\text{мин}} - 1}{2} & \text{при нечетном } d_{\text{мин}}, \\[2ex] \dfrac{d_{\text{мин}}}{2} - 1 & \text{при четном } d_{\text{мин}}. \end{cases}$$

При декодировании с исправлением ошибок и стираний могут быть исправлены $q \leqslant q_{\text{и}}$ ошибок и $q \leqslant q_{\text{с}}$ стираний, если их число удовлетворяет условию

$$q_{\text{и}} < \frac{d_{\text{мин}} - q_{\text{с}}}{2}.$$

В общем случае код с расстоянием $d_{\text{мин}}$ исправляет произвольное число $q \leqslant q_{\text{с}}$ стираний, $q \leqslant q_{\text{и}}$ ошибок и обнаруживает произвольное число $q_{\text{и}} \leqslant q \leqslant q_0$ ошибок при условии, что $q_{\text{и}} + q_0 + q_{\text{с}} < d_{\text{мин}}$.

На практике широко распространены линейные коды. Линейный двоичный код длины n — это код, для которого сумма по модулю 2 любых разрешенных кодовых комбинаций также является разрешенной кодовой комбинацией.

Если формирование кодовой комбинации осуществляется в два этапа, причем на первом этапе образуются кодовые комбинации примитивного кода, а затем по определенному правилу к ним добавляются избыточные (контрольные, проверочные) символы, то код называется систематическим. Проверочные символы $b_{\text{пр}}$ формируются по правилу

$$b_{i,\text{пр}} = \sum_{l=1}^{k} \gamma_{l,i}\, b_l, \tag{4.9}$$

где $i = k+1,\ k+2,\ \ldots,\ k+r$; k — число информационных символов, r — число избыточных символов. Суммирование в (4.9) осуществляется по модулю 2 для двоичного кода[1]. Очень часто линейный код задают не соотношениями (4.9), а порождающей и проверочной матрицами.

Линейный код можно получить линейным суммированием по модулю 2 любых k линейнонезависимых кодовых комбинаций, в качестве которых удобно использовать комбинации, которые в информационных разрядах содержат лишь один ненулевой символ. Матрица, которая имеет k строк, образованных этими комбинациями, называется порождающей, или производящей матрицей G[20]. Размерность порождающей матрицы линейного кода $k\times n$ (k строк и n столбцов). При учете (4.9) порождающую матрицу можно записать

$$\mathbf{G} = \left\| k \left\{ \overbrace{\begin{array}{ll} 100\ldots0 & \gamma_{1,k+1}\cdots\gamma_{1,k+r} \\ 010\ldots0 & \gamma_{2,k+1}\cdots\gamma_{2,k+r} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \underbrace{00\ldots1}_{k} & \underbrace{\gamma_{k,k+1}\cdots\gamma_{k,k+r}}_{r} \end{array}}^{n=k+r} \right. \right\| = \| \mathbf{1}_k\mathbf{G}' \|, \quad (4.10)$$

где $\mathbf{1}_k$ — единичная матрица порядка k, а $\mathbf{G}'$ — матрица коэффициентов размерности $k\times r$.

Проверочная матрица представляет собой таблицу с размерами $r\times n$ ($r=n-k$ столбцов, n строк) вида

$$\mathbf{H} = \left\| n \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{1,k+1}\cdots\gamma_{1,n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \gamma_{k,k+1}\cdots\gamma_{k,n} \\ 100\ldots\ldots0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \underbrace{000\ldots\ldots1}_{r} \end{array} \right. \right\|. \quad (4.11)$$

Для каждой разрешенной кодовой комбинации $\vec{b}$ матричное произведение $\mathbf{bH}=0$. Таким образом, совокупность кодовых комбинаций — это множество последовательностей $\vec{b}$, для которых $\mathbf{bH}=0$. Множество кодовых комбинаций является также множеством линейных комбинаций строк порождающей матрицы $\mathbf{G}$. Линейный код длины n с k информационными символами и $r=n-k$ проверочными символами обозначается (n, k). Кодовую комбинацию такого кода можно записать

---

[1] Коды, у которых проверочные символы формируются путем суммирования по модулю 2, называются кодами с проверкой на четность.

$$\vec{b} = \underbrace{b_{n,\,\text{пр}}\, b_{n-1,\text{пр}}\, \cdot\ \cdot\ . b_{k+1,\,\text{пр}}}_{r=n-k} \underbrace{b_k b_{k-1}\, b_{k-2}\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ b_1}_{k},$$

где $\{b_i\}$ — информационные символы; $\{b_{j,\text{пр}}\}$ — проверочные символы.

Избыточность линейного двоичного кода

$$\rho_k = 1 - \frac{\log 2^k}{n} = 1 - \frac{k}{n} = \frac{r}{n}\ , \tag{4.12}$$

где $r=n-k$ — число проверочных символов.

«Оптимальным» является код $(n,\ k)$, обеспечивающий наименьшую вероятность ошибочного декодирования среди всех кодов той же длины n и избыточности r/n.

Совершенные коды — это коды, которые всю свою избыточность расходуют на исправление ошибок заданной кратности q. Квазисовершенным называется код, который исправляет некоторую часть ошибок кратности $q+1$.

Обнаружение ошибок при использовании линейных кодов основано на проверке соотношений (4.9): по принятой кодовой комбинации составляются контрольные суммы по модулю 2

$$b^{\text{конт}}_{i,\,\text{пр}} = \sum_{l=1}^{k} \gamma_{l,\,i}\, b'_l (i = k+1,\ .\ .\ .,\ k+r) \tag{4.13}$$

(здесь b'_l — l-й знак принятой кодовой комбинации $\vec{b}'$) и сопоставляются с проверочными символами принятой кодовой комбинации.

Совокупность чисел $c_{j-k} = b'_{j,\text{пр}} + b^{\text{конт}}_{j,\text{пр}}$ (mod_2) для данной кодовой комбинации называется синдромом [20]:

$$\vec{c}\,(\vec{b}') = c_r,\ .\ .\ .\ .,\ c_3,\ c_2,\ c_1.$$

Декодирование принятой кодовой комбинации может быть осуществлено с помощью проверочной матрицы $\mathbf{H}$. Если принята комбинация $\vec{b}$, то синдром $\vec{c}$ можно определить равенством $\mathbf{c} = \mathbf{b}'\mathbf{H}$. Таким образом, синдром — это вектор-строка $(c_1,\ c_2,\ ...,\ c_r)$ с r компонентами (по одной для каждого проверочного символа). Если $\vec{b}$ — переданная кодовая комбинация, а $\vec{b}'$ — принятая, то сумма их по модулю 2 mod_2 $(\vec{b} + \vec{b}') = z$ называется шумовой последовательностью. При этом $\mathbf{c} = \mathbf{z}\mathbf{H}$.

При правильном приеме все элементы синдрома равны нулю. Отличие хотя бы одного элемента синдрома от нуля означает, что произошла ошибка.

При декодировании с исправлением ошибок по виду синдрома можно определить разряд кодовой комбинации, в котором произошла ошибка.

Линейный двоичный код, которому принадлежат кодовые комбинации, полученные путем циклической перестановки символов, называется циклическим.

Кодовый вектор $\vec{b}$ циклического кода представляют полиномом $(n-1)$ степени: $b(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$, где коэффициенты α_i принимают значения 0 или 1. При таком представлении кодовый вектор, полученный из $\vec{b}$ циклической перестановкой элементов, можно рассматривать как результат умножения полинома $b(x)$ на x, если считать, что $x^n=1$.

Полином наименьшей степени среди всех полиномов, соответствующих кодовым комбинациям циклического кода, называется порождающим полиномом $g(x)=1+\gamma_1 x+\gamma_2 x^2+\ldots+\gamma_{r-1}x^{r-1}+\gamma_r x^r$. Коэффициенты γ_i равны 0 или 1. Степень порождающего полинома определяет число проверочных символов в кодовой комбинации.

Зная порождающий полином, можно построить все кодовые комбинации циклического кода, а также устройства кодирования и декодирования. На порождающий полином должен делиться без остатка двучлен $x^n \pm 1$. Полученный результат определяет проверочный полином

$$h(x)=\frac{x^n-1}{g\ (x)}\,. \tag{4.14}$$

Порождающий полином $g(x)$ и проверочный полином $h(x)$ являются ортогональными, так как при $x^n-1=0$ они удовлетворяют условию

$$g\ (x)\, h\ (x)=0\,. \tag{4.15}$$

Невыполнение условия (4.15), т. е. $h(x)g(x)\neq 0$, является признаком ошибки.

Помимо блочных, в настоящее время распространены рекуррентные или цепные коды. В цепном коде информационные символы чередуются с проверочными, образуя последовательность

$$b_1 b_{1,2}\ b_2 b_{2,3}\ b_3 b_{3,4}\ b_4\ \ldots$$

где b_l — l-й информационный символ, принимающий значение 0 или 1 в соответствии с передаваемым сообщением, а $b_{l,l+1}$ — проверочный символ, определяемый уравнением

$$b_{l,\,l+1}=b_l+\ b_{l+1}, \tag{4.16}$$

причем суммирование осуществляется по модулю 2. Цепной код, содержащий на n символов k информационных, обозначают (k/n).

Разновидностью цепных кодов являются так называемые сверточные коды, имеющие кодовые последовательности вида

$$\ldots b_{(i-1),\text{пр}}\, b_i b_{(i+1),\text{пр}}\ b_{(i+2),\text{пр}}\ b_{(i+3),\text{пр}}\ b_{(i+4),\text{пр}}\ b_{(i+5),\text{пр}} \times$$
$$\times\ b_{(i+6),\text{пр}}\ b_{(i+7),\text{пр}}\ \ldots$$

Проверочные символы такого кода формируются часто по правилу

$$b_{i,\text{пр}}=b_{i-4}+b_{i-7};\quad b_{(i+1),\text{пр}}=b_{i-1}+b_{i-4}+b_{i-7}.$$

Суммирование ведется по модулю 2.

К рекуррентным неблочным кодам можно условно отнести относительный код, используемый в дискретных системах связи с относительной модуляцией фазы (ОФМ).

Задачи

4.2.1. Показать, что код с расстоянием $d_{\text{мин}}$ позволяет обнаружить $q_{\text{о}}\leqslant d_{\text{мин}}-1$ ошибок и исправить $q_{\text{и}}\leqslant d_{\text{мин}}/2-1$ ошибок.

4.2.2. Каждые 100 символов двоичного источника кодируются двоичной последовательностью, содержащей $n=125$ кодовых символов. Определить избыточность кода $\rho_к$. Найти вероятность ошибочного декодирования кодовой комбинации в канале с независимыми ошибками, если $d_{мин}=6$, вероятность ошибочной **регистрации** кодового символа $p_0=0{,}05$, а декодирование осуществляется по минимуму хеммингова расстояния.

4.2.3. Символы двоичного источника A и B кодируются избыточным трехразрядным двоичным кодом с $d=3$. Составить таблицу возможных состояний на выходе декодера при декодировании по минимуму хеммингова расстояния в нестертых символах:

1) с исправлением стираний и обнаружением ошибок;

2) с исправлением ошибок и стираний;

3) с исправлением ошибок и стираний и обнаружением ошибок.

4.2.4. Двоичный код [20], предназначенный для кодирования восьми сообщений, содержит кодовые комбинации:

$$\vec{b}_1 = 00000;\quad \vec{b}_2 = 10011;\quad \vec{b}_3 = 01010;\quad \vec{b}_4 = 11001;$$

$$\vec{b}_5 = 00101;\quad \vec{b}_6 = 10110;\quad \vec{b}_7 = 01111;\quad \vec{b}_8 = 11100.$$

Является ли данный код линейным? Найти избыточность кода и $d_{мин}$.

4.2.5. Построить систематический код (7, 4), предназначенный для кодирования сообщений двоичного источника, имеющего объем $K=2^4$ символов. Показать, что $d_{мин}$ такого кода равно 3.

4.2.6. Составить таблицу синдромов одиночных ошибок для кода (7, 4) и показать, каким ошибочным разрядам они соответствуют.

ТАБЛИЦА 4.7

Информационная последовательность	Кодовая комбинация
00	10110
10	11101
01	10101
11	01011

4.2.7. В табл. 4.7 приведены двухразрядные двоичные информационные последовательности и соответствующие им кодовые комбинации.

Показать, что полученный код является систематическим кодом с проверкой на четность, и выразить каждый разряд кодовой комбинации в виде линейной комбинации информационных символов. Найти для заданного кода порождающую и проверочную матрицы.

Составить таблицу декодирования при декодировании в двоичном симметричном канале с вероятностью ошибочного перехода $p_0 < 0{,}5$. Найти вероятность неправильного декодирования.

4.2.8. На рис. 4.2 показана схема формирования двоичного кода при передаче по двоичному симметричному каналу с вероятностью ошибочного перехода

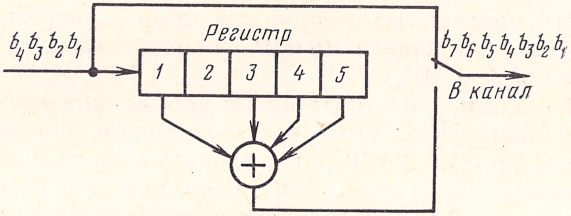


Рис. 4.2. Схема формирования двоичного кода

$p_0 < 0{,}5$ [4]. Первоначально регистр сдвига заполнен нулями; затем в регистр поступают четыре информационных символа и одновременно передаются по каналу. После этого передаются три проверочных символа. Перед вычислением проверочного символа все четыре информационных символа сдвигаются в регистре на одну позицию вправо.

Найти проверочную матрицу, порождающую матрицу, таблицу декодирования и вероятность ошибочного декодирования для данного кода.

4.2.9. Показать, что полином $g(x) = 1 + x + x^3$ является порождающим для циклического кода (7, 4). Составить кодовые комбинации циклического кода (7, 4).

4.2.10. Составить структурные схемы кодера и декодера для циклического кода (7, 4), заданного порождающим полиномом $g(x) = 1 + x + x^3$. Пояснить процесс кодирования и декодирования с исправлением ошибок.

4.2.11. Какой объем алфавита должен иметь дискретный источник, чтобы его символы можно было бы закодировать семиразрядным кодом с весом $n = 3$? Составить кодовые комбинации такого кода. Найти избыточность кода.

4.2.12. Вероятность ошибочного приема элементарного символа кодовой комбинации $p_0 = 10^{-2}$. Чему будет равна вероятность необнаруженной ошибки при использовании кода с постоянным весом (3/4).

4.2.13. Кодом с четным числом единиц называется код, который образуется путем добавления к комбинации n-разрядного кода одного знака, чтобы количество всех единиц в новом $(n+1)$-разрядном коде было четным.

Составить кодовые комбинации такого кода, построенного на основе пятиразрядного двоичного кода. Определить избыточность кода с четным числом единиц. Вычислить вероятность необнаруженной ошибки, если вероятность ошибочного приема одного знака кодовой комбинации $p_0=10^{-2}$.

4.2.14. Коды, в которых путем добавления двух проверочных элементов сумма всех элементов, полученная сложением по модулю 3, равна 0, называются кодами с числом единиц, кратным 3 [26]. Составить кодовые комбинации такого кода, построенного на базе пятиразрядного двоичного кода, и определить для него вероятность необнаруженной ошибки. Найти избыточность полученного кода.

4.2.15. Повышение эффективности кодов с обнаружением ошибок может быть достигнуто введением определенных зависимостей между элементами кодовых комбинаций. Примером таких кодов является корреляционный код [26], который строится по правилу: элемент первичного кода преобразуется в два элемента, а именно 1 преобразуется в 1 0, а 0 в 0 1. Полагая, что первичный код является пятиразрядным, найти избыточность корреляционного кода. Определить вероятность необнаруженной ошибки.

4.2.16. В технике связи часто применяется инверсный код (код с повторением), в основу построения которого положен метод повторения исходной кодовой комбинации: при четном числе единиц кодовая комбинация просто повторяется, при нечетном — повторяется в инвертированном виде [26]. Определить вероятность необнаруживаемой ошибки для инверсного кода, построенного на основе пятиразрядного двоичного кода.

4.2.17. Двоичный источник информации выдает последовательность символов 1 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 0 1. Найти контрольные символы и записать кодовую последовательность рекуррентного кода (1/2) [26]. Составить структурную схему кодирующего и декодирующего устройства для такого кода.

4.2.18. Показать, что кодирование в системе относительной фазовой манипуляции (ОФМ) [19] является рекуррентным [26].

Решения и ответы

Р.4.2.1. Если при передаче некоторой разрешенной кодовой комбинации произошло q ошибок, то расстояние по Хэммингу между принятой и переданной комбинациями $d=q$. Так как между любыми двумя разрешенными кодовыми комбинациями расстояние по Хэммингу не меньше $d_{\text{мин}}$, то кодовая комбинация, отличающаяся от переданной в $q=d_{\text{мин}}-1$ разрядах, является запрещенной, и ошибки будут обнаружены. Сказанное поясняется рис. 4.3*а*.

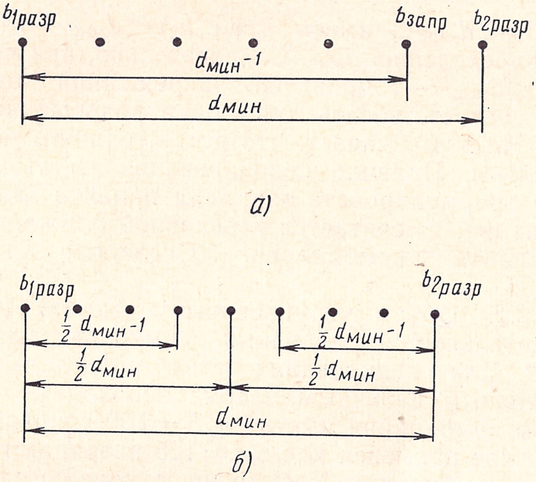

$b_{1\text{разр}}$
$b_{\text{запр}}$
$b_{2\text{разр}}$
$d_{\text{мин}}-1$
$d_{\text{мин}}$
а)
$b_{1\text{разр}}$
$b_{2\text{разр}}$
$\frac{1}{2}d_{\text{мин}}-1$
$\frac{1}{2}d_{\text{мин}}-1$
$\frac{1}{2}d_{\text{мин}}$
$\frac{1}{2}d_{\text{мин}}$
$d_{\text{мин}}$
б)

Рис. 4.3. К оценке обнаруживающей и исправляющей способности корректирующего кода

Для доказательства того, что код с расстоянием $d_{\text{мин}}$ может исправить $q_{\text{и}} \leqslant d_{\text{мин}}/2-1$ ошибок, достаточно убедиться, что среди разрешенных кодовых комбинаций имеется только одна, которая могла бы превратиться в принятую запрещенную комбинацию.

Допустим, что существуют две разрешенные кодовые комбинации $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$, которые при искажении $d_{\text{мин}}/2-1$ символов превращаются в одну и ту же запрещенную кодовую комбинацию $\vec{b}^*$. Это означает, что

$$d(\vec{b}_1, \vec{b}^*) = d_{\text{мин}}/2 - 1 < d_{\text{мин}}/2 \quad \text{и} \quad d(\vec{b}_2, \vec{b}^*) = $$
$$= d_{\text{мин}}/2 - 1 < d_{\text{мин}}/2.$$

Для того чтобы из комбинации $\vec{b}_1$ получить комбинацию $\vec{b}_2$, необходимо изменить не более $d(\vec{b}_1, \vec{b}^*) + d(\vec{b}_2, \vec{b}^*)$ символов, так как выполняется условие $d(\vec{b}_1, \vec{b}^*) + d(\vec{b}_2, \vec{b}^*) \leqslant d(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ (см. § 1.5). Поскольку при сделанном допущении $d(\vec{b}_1, \vec{b}^*) < d_{\text{мин}}/2$ b и $d(\vec{b}_2, \vec{b}^*) < d_{\text{мин}}/2$, имеем $d(\vec{b}_1, \vec{b}_2) < d_{\text{мин}}$, что противоречит определению $d_{\text{мин}}$. Следовательно, при числе ошибок $q_{\text{и}} \leqslant d_{\text{мин}}/2 - 1$ принятой запрещенной комбинации может соответствовать лишь одна разрешенная комбинация. Но это означает, что все $q_{\text{и}}$ ошибок могут быть исправлены. Правило декодирования в этом случае можно сформулировать так: если принята запрещенная комбинация, то считается переданной ближайшая к ней разрешенная комбинация. Сказанное поясняется рис. 4.3*б*.

Р.4.2.2. Объем укрупненного алфавита (число последовательностей двоичных символов длины 100) $K = 2^{100}$. Для кодирования всех последовательностей примитивным двоичным кодом необходимо в каждой кодовой комбинации иметь $\log K = 100$ разрядов. В данном случае применен код с $n = 125$ разрядами в каждой кодовой комбинации. Избыточность кода согласно (4.12)

$$\rho_{\text{к}} = 1 - \frac{\log 2^{100}}{125} = 0{,}2.$$

Кодовая комбинация будет декодирована ошибочно, если в ней будет искажено более $d_{\text{мин}}/2 - 1$ символов. Следовательно, вероятность ошибочного декодирования равна суммарной вероятности ошибки кратности 4, 5 и 6:

$$p_{\text{к}} = C_{125}^4 p_0^4 (1 - p_0)^{121} + C_{125}^5 p_0^5 (1 - p_0)^{120} +$$
$$+ C_{125}^6 p_0^6 (1 - p_0)^{119}.$$

Р.4.2.3. Допустим, что из $2^3 = 8$ кодовых комбинаций трехразрядного двоичного кода в качестве разрешенных выбираются комбинации 000 и 111. Расстояние по Хэммингу между этими комбинациями максимально и равно 3. Из-за ошибок в канале (переход 0 в 1 и 1 в 0)

ТАБЛИЦА 4.8

Способы декодирования	Состояние							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Символ источника	A	B	B	A	A	B	A	B
Переданная кодовая комбинация	000	111	111	000	000	111	000	111
Принятая кодовая комбинация	000	?11	010	0??	?10	000	1??	???
Расстояние по Хеммингу по нестертым сиволам	0	0	2	0	1	3	1	—
Декодирование с исправлением стираний и обнаружением ошибок	A	B	?	A	?	A (ош)	B (ош)	?
Декодирование с исправлением ошибок и стираний	A	B	A (ош)	A	A или B (ош)	A (ош)	B (ош)	B или A (ош)
Декодирование с исправлением стираний и ошибок и обнаружением ошибок	A	B	A (ош)	A	?	A (ош)	B (ош)	?

или стираний (появление на приеме третьего символа: «?») принятая кодовая комбинация отличается от переданной. Из $3^3=27$ всевозможных кодовых комбинаций на приеме 25 соответствуют запрещенным и позволяют, следовательно, обнаружить некоторые ошибки и стирания, а часть из них исправить. Возможные ситуации на выходе декодера для различных состояний кодера и канала (1, 2, 3, ..., 8) и способов декодирования приведены в табл. 4.8.

Из данной таблицы следует, что код с $d_{\text{мин}}=3$ позволяет надежно обнаружить два ошибочных элемента комбинации, исправить два стертых символа и исправить одну ошибку при отсутствии стираний.

При декодировании с исправлением стираний и обнаружением ошибок в месте приема регистрируется знак стирания («?»), если принятая комбинация является запрещенной. Ошибка не обнаружена и, следовательно, не исправлена в состоянии 6, поскольку принятая кодовая комбинация вследствие трехкратной ошибки превратилась в разрешенную комбинацию, не передававшуюся по каналу. Символ в состоянии 7 также зарегистрирован с ошибкой, поскольку по нестертой позиции принятая комбинация совпадает с той, которая не передавалась. Декодирование с исправлением стираний и ошибок по критерию минимума хеммингова расстояния по нестертым позициям между принятой и переданной комбинациями дает ошибку по состоянию 3, 6 и 7. Могут также появиться ошибки по состоянию 5 и 8, так как в этих состояниях хеммингово расстояние между принятой и обеими разрешенными комбинациями одинаково. Введение зоны стирания позволяет при декодировании с исправлением ошибок и стираний и с обнаружением ошибок исключить ошибки в состояниях 5 и 8.

Р.4.2.4. По определению линейного кода сумма по модулю 2 любых двух его кодовых комбинаций дает разрешенную комбинацию. В качестве примера найдем сумму по модулю 2 комбинаций $\vec{b}_3$ и $\vec{b}_2$:

$$\begin{array}{l} \vec{b}_2 = 1\,0\,0\,1\,1 \\ \underline{\vec{b}_3 = 0\,1\,0\,1\,0} \\ \vec{b}_4 = 1\,1\,0\,0\,1. \end{array}$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\mathrm{mod}_2\,(\vec{b}_2+\vec{b}_4)=\vec{b}_3; \quad \mathrm{mod}_2\,(\vec{b}_2+\vec{b}_5)=\vec{b}_6; \quad \mathrm{mod}_2\,(\vec{b}_2+\vec{b}_6)=\vec{b}_5;$$

$$\operatorname{mod}_2(\vec{b}_2+\vec{b}_7)=\vec{b}_8;\quad \operatorname{mod}_2(\vec{b}_2+\vec{b}_8)=\vec{b}_7;\quad \operatorname{mod}_2(\vec{b}_3+\vec{b}_4)=\vec{b}_2;$$

$$\operatorname{mod}_2(\vec{b}_3+\vec{b}_5)=\vec{b}_7;\quad \operatorname{mod}_2(\vec{b}_3+\vec{b}_6)=\vec{b}_8;\quad \operatorname{mod}_2(\vec{b}_3+\vec{b}_7)=\vec{b}_5;$$

$$\operatorname{mod}_2(\vec{b}_3+\vec{b}_8)=\vec{b}_6;\quad \operatorname{mod}_2(\vec{b}_4+\vec{b}_5)=\vec{b}_8;\quad \operatorname{mod}_2(\vec{b}_4+\vec{b}_6)=\vec{b}_7;$$

$$\operatorname{mod}_2(\vec{b}_4+\vec{b}_7)=\vec{b}_6;\quad \operatorname{mod}_2(\vec{b}_4+\vec{b}_8)=\vec{b}_5;\quad \operatorname{mod}_2(\vec{b}_5+\vec{b}_6)=\vec{b}_2;$$

$$\operatorname{mod}_2(\vec{b}_5+\vec{b}_7)=\vec{b}_3;\quad \operatorname{mod}_2(\vec{b}_3+\vec{b}_8)=\vec{b}_4;\quad \operatorname{mod}_2(\vec{b}_6+\vec{b}_7)=\vec{b}_4;$$

$$\operatorname{mod}_2(\vec{b}_6+\vec{b}_8)=\vec{b}_3;\quad \operatorname{mod}_2(\vec{b}_7+\vec{b}_8)=\vec{b}_2.$$

Следовательно, заданный код является линейным. Найдем его избыточность. Для кодирования восьми сообщений примитивным кодом достаточно иметь три разряда в каждой комбинации. Согласно (4.12) $\rho_{к}=1-\frac{k}{n}=0{,}4$.

Рассматривая совокупность заданных кодовых комбинаций, легко заметить, что минимальное число разрядов, в которых комбинации отличаются друг от друга, равно 2. Следовательно, для данного кода $d_{мин}=2$.

Р.4.2.5. Образуем сначала примитивный равномерный четырехразрядный код. Число кодовых комбинаций такого кода $N=K=2^4=16$:

$$\vec{b}_1=0000;\quad \vec{b}_2=0001;\quad \vec{b}_3=0010;\quad \vec{b}_4=0011;$$

$$\vec{b}_5=0100;\quad \vec{b}_6=0101;\quad \vec{b}_7=0110;\quad \vec{b}_8=0111;$$

$$\vec{b}_9=1000;\quad \vec{b}_0=1001;\quad \vec{b}_{11}=1010;\quad \vec{b}_{12}=1011;$$

$$\vec{b}_{13}=1100;\quad \vec{b}_{14}=1101;\quad \vec{b}_{15}=1110;\quad \vec{b}_{16}=1111,$$

Теперь к каждой кодовой комбинации данного кода добавим по три проверочных символа, определяемых соотношениями

$$\left.\begin{aligned} b_{5,\,пр} &= b_1+b_2+b_4\\ b_{6,\,пр} &= b_2+b_3+b_4\\ b_{7,\,пр} &= b_1+b_2+b_3 \end{aligned}\right\}\operatorname{mod}_2$$

или матрицей коэффициентов $\gamma_{l,\,i}$ [см. ф-лу (4.13)]

$$\left\|\begin{matrix} \gamma_{1,5}=1 & \gamma_{2,5}=1 & \gamma_{3,5}=0 & \gamma_{4,5}=1\\ \gamma_{1,6}=0 & \gamma_{2,6}=1 & \gamma_{3,6}=1 & \gamma_{4,6}=1\\ \gamma_{1,7}=1 & \gamma_{2,7}=1 & \gamma_{3,7}=1 & \gamma_{4,7}=0 \end{matrix}\right\|.$$

Кодовые комбинации кода (7, 4) будут иметь вид

$$\vec{b}_1 = \underbrace{0\,0\,0}_{\text{проверочные символы}} \qquad \underbrace{0\,0\,0\,0}_{\text{информационные символы}};$$

$$\begin{array}{lll}
\vec{b}_2 = 1010001; & \vec{b}_3 = 1110010; & \vec{b}_4 = 0100011; \\
\vec{b}_5 = 1100100; & \vec{b}_6 = 0110101; & \vec{b}_7 = 0010110; \\
\vec{b}_8 = 1000111; & \vec{b}_9 = 0111000; & \vec{b}_{10} = 1101001; \\
\vec{b}_{11} = 1001010; & \vec{b}_{12} = 0011011; & \vec{b}_{13} = 1011100; \\
\vec{b}_{14} = 0001101; & \vec{b}_{15} = 0101110; & \vec{b}_{16} = 0001111.
\end{array}$$

Сравнивая полученные кодовые комбинации между собой, замечаем, что минимальное число разрядов, в которых кодовые комбинации отличаются между собой, равно 3. Следовательно, $d_{\text{мин}} = 3$. Нетрудно видеть, что полученная величина равна минимальному весу полученных кодовых комбинаций, кроме комбинации, содержащей нули во всех разрядах [24].

Р.4.2.6. Контрольные символы на приеме определяются соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}
b^{\text{конт}}_{5\,\text{пр}} &= b'_1 + b'_2 + b'_4 \\
b^{\text{конт}}_{6\,\text{пр}} &= b'_2 + b'_3 + b'_4 \\
b^{\text{конт}}_{7\,\text{пр}} &= b'_1 + b'_2 + b'_3
\end{aligned}\right\} \bmod 2.$$

Синдром $\vec{c}(\vec{b}) = c_3 c_2 c_1$, где $c_3 = b'_{7\text{пр}} + b^{\text{конт}}_{7\text{пр}}$; $c_2 = b'_{6\text{пр}} + b^{\text{конт}}_{6\text{пр}}$; $c_1 = b'_{5\text{пр}} + b^{\text{конт}}_{5\text{пр}}$. В табл. 4.9 приведены синдромы, соответствующие одиночным ошибкам в различных разрядах кодовых комбинаций.

ТАБЛИЦА 4.9

№ пп.	Синдром	Разряд кодовой комбинации, подлежащий исправлению
1	001	5
2	010	6
3	011	4
4	100	7
5	101	1
6	110	3
7	111	2

При синдроме № 1 (не совпадают $b'_{5\text{пр}}$ и $b_{5\text{пр}}^{\text{конт}}$) наиболее вероятно, что ошибочно принят проверочный символ $b'_{5\text{пр}}$, так как, если $b'_{6\text{пр}} = b_{6\text{пр}}^{\text{конт}}$ и $b'_{7\text{пр}} = b_{7\text{пр}}^{\text{конт}}$, разумно считать, что информационные и проверочные символы $b'_{6\text{пр}}$ и $b'_{7\text{пр}}$ приняты без ошибок.

Синдромы № 2 и № 4 позволяют заключить, что вероятнее всего ошибочно принят проверочный символ $b_{6\text{пр}}$ или $b_{7\text{пр}}$.

При синдроме № 3 (одновременно не совпадают $b'_{5\text{пр}}$ с $b_{5\text{пр}}^{\text{конт}}$, и $b'_{6\text{пр}}$ с $b_{6\text{пр}}^{\text{конт}}$) вероятнее всего ошибка в символе b'_4, определяющем как $b_{5\text{пр}}^{\text{конт}}$, так и $b_{6\text{пр}}^{\text{конт}}$, в то время как $b_{7\text{пр}}^{\text{конт}} = b'_{7\text{пр}}$ не зависит от символа b'_4.

Р.4.2.7. Обозначив символы информационной последовательности a_1 и a_2, замечаем, что во всех кодовых комбинациях

$$b_1 = a_1; \quad b_2 = a_2; \quad b_3 = \text{mod}_2\,(a_1 + a_2); \quad b_4 = a_1;$$

$$b_5 = \text{mod}_2\,(a_1 + a_2).$$

Так как $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$ и все символы являются линейными комбинациями a_1 и a_2, рассматриваемый код является систематическим кодом с проверкой на четность.

Порождающая и проверочная матрицы этого кода:

$$\mathbf{G} = \begin{Vmatrix} 1\,0\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,1\,0\,1 \end{Vmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{Vmatrix} 1\,1\,1 \\ 1\,0\,1 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{Vmatrix}.$$

Составим табл. 4.10 — таблицу декодирования.

ТАБЛИЦА 4.10

№ пп.	Синдром	Шумовая последовательность
1	0 0 0	0 0 0 0 0
2	1 1 1	0 0 0 0 1
3	1 0 1	0 0 0 1 0
4	0 0 1	0 0 1 0 0
5	0 1 0	0 1 0 1 0
6	1 0 0	1 0 0 0 0
7	1 1 0	1 1 0 0 0 или 0 0 1 0 1
8	0 1 1	0 0 1 1 0 или 1 0 0 0 1

Из этой таблицы видно, что рассматриваемый код позволяет исправить все одиночные ошибки (им соответствуют синдромы 2—6) и две разновидности двойных ошибок (синдромы 7 и 8).

Вероятность ошибочного декодирования

$$p = 1 - (1 - p_0)^5 + 5\,p_0\,(1 - p_0)^4 - 2\,p_0^2\,(1 - p_0)^3.$$

Р.4.2.8. При формировании символа b_5 в левой части регистра сдвига находятся четыре информационных символа: b_1, b_2, b_3 и b_4, так что $b_5 = \mathrm{mod}_2(b_1 + b_2 + b_4)$. После того как вычислено b_5, все информационные символы сдвигаются на одну позицию вправо, а в левый разряд регистра подается 0. Поэтому $b_6 = \mathrm{mod}_2(b_1 + b_2 + b_3)$.

Точно так же находим $b_7 = \mathrm{mod}_2\,(b_2 + b_3 + b_4)$. Порождающая и проверочная матрицы данного кода:

$$\mathbf{G} = \left\| \begin{matrix} 1\,0\,0\,0\,1\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,0\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,1\,1\,0\,1 \end{matrix} \right\|; \qquad \mathbf{H} = \left\| \begin{matrix} 1\,1\,0 \\ 1\,1\,1 \\ 0\,1\,1 \\ 1\,0\,1 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{matrix} \right\|;$$

ТАБЛИЦА ДЕКОДИРОВАНИЯ:

Синдром	Шумовая последовательность	Синдром	Шумовая последовательность
0 0 0	0 0 0 0 0 0 0	1 0 1	0 0 0 1 0 0 0
0 1 1	0 0 0 0 0 0 1	0 0 1	0 0 1 0 0 0 0
1 1 1	0 0 0 0 0 1 0	0 1 0	0 1 0 0 0 0 0
1 1 0	0 0 0 0 1 0 0	1 0 0	1 0 0 0 0 0 0

Вероятность ошибочного декодирования

$$p = 1 - (1 - p_0)^7 - 7\,(1 - p_0)^6\,p_0.$$

Р.4.2.9. Проверим, является ли полином $g(x) = 1 + x + x^3$ порождающим для циклического кода (7, 4).

Для этого поделим полином x^7+1 на $g(x)$:

$$\begin{array}{l|l}
x^7+1 & x^3+x+1 \\ \cline{2-2}
x^7+x^5+x^4 & x^4+x^2+1 \\ \cline{1-1}
\quad x^5+x^4+1 & \\
\quad x^5+x^3+x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad x^4+x^3+x^2+1 & \\
\qquad x^4+x^2+x & \\ \cline{1-1}
\qquad x^3+x+1 & \\
\qquad x^3+x+1 & \\ \cline{1-1}
\qquad 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

Поскольку деление осуществилось без остатка, можно заключить, что полином $g(x)=1+x+x^3$ является порождающим для циклического кода (7, 4). Найдем теперь кодовые комбинации этого кода. Комбинации $\vec{b}_1$ сопоставим порождающий полином $b_1(x)=1+x+x^3$, $\vec{b}_1=1\,1\,0\,1\,0\,0\,0$ (информационными считаем $k=4$ символов справа, соответствующих высшим степеням x, а проверочными $r=3$ первых символов слева). Осуществляя циклическую перестановку в комбинации $\vec{b}_1$ (что эквивалентно умножению полинома $b_1(x)$ на x), получаем вторую кодовую комбинацию: $b_2(x)=x+x^2+x^4$, $\vec{b}_2=0\,1\,1\,0\,1\,0\,0$. Продолжая аналогичным образом, получаем третью и четвертую комбинации:

$$b_3(x)=x^2+x^3+x^5;\ \vec{b}_3=0\,0\,1\,1\,0\,1\,0;$$

$$b_4(x)=x^3+x^4+x^6;\ \vec{b}_4=0\,0\,0\,1\,1\,0\,1.$$

Эти комбинации называются базисными. Остальные 12 комбинаций могут быть получены путем суммирования по модулю 2. Все комбинации данного кода приведены в табл. 4.11.

Р.4.2.10. Схема кодера для циклического кода (7, 4), соответствующего порождающему полиному $g(x)=1+x+x^3$, показана на рис. 4.4*а* [25]. Рассмотрим процесс кодирования. Кодирующее устройство работает следующим образом. Вначале ключ *К* находится в положении «1». При этом информационные символы поступают одновременно в канал и в регистр сдвига, который в начальном положении содержит одни нули. Когда информационные символы переданы, ключ *К* переключается в положение «2», оставаясь там в тече-

ТАБЛИЦА 4.11

№ комбинации	Кодовая комбинация	Полином	Из какой комбинации данная получается циклической перестановкой	Комбинация образована сложением векторов
$\overrightarrow{b}_1$	1 1 0 1 0 0 0	$1+x+x^3$	$\overrightarrow{b}_9$	Базисный вектор
$\overrightarrow{b}_2$	0 1 1 0 1 0 0	$x+x^2+x^4$	$\overrightarrow{b}_1$	
$\overrightarrow{b}_3$	0 0 1 1 0 1 0	$x^2+x^3+x^5$	$\overrightarrow{b}_2$	»
$\overrightarrow{b}_4$	0 0 0 1 1 0 1	$x^3+x^4+x^6$	$\overrightarrow{b}_3$	»
$\overrightarrow{b}_5$	1 0 1 1 1 0 0	$1+x^2+x^3+x^4$	$\overrightarrow{b}_{10}$	$\overrightarrow{b}_1$, $\overrightarrow{b}_2$
$\overrightarrow{b}_6$	1 1 1 0 0 1 0	$1+x+x^2+x^5$	$\overrightarrow{b}_{11}$	$\overrightarrow{b}_1$, $\overrightarrow{b}_3$
$\overrightarrow{b}_7$	1 0 0 0 1 1 0	$1+x^4+x^5$	$\overrightarrow{b}_4$	$\overrightarrow{b}_1$, $\overrightarrow{b}_2$, $\overrightarrow{b}_3$
$\overrightarrow{b}_8$	0 1 0 1 1 1 0	$x+x^3+x^4+x^5$	$\overrightarrow{b}_5$	$\overrightarrow{b}_2$, $\overrightarrow{b}_3$
$\overrightarrow{b}_9$	1 0 1 0 0 0 1	$1+x^2+x^6$	$\overrightarrow{b}_{12}$	$\overrightarrow{b}_1$, $\overrightarrow{b}_2$, $\overrightarrow{b}_4$
$\overrightarrow{b}_{10}$	0 1 1 1 0 0 1	$x+x^2+x^3+x^6$	$\overrightarrow{b}_6$	$\overrightarrow{b}_2$, $\overrightarrow{b}_4$
$\overrightarrow{b}_{11}$	1 1 0 0 1 0 1	$1+x+x^4+x^6$	$\overrightarrow{b}_{13}$	$\overrightarrow{b}_1$, $\overrightarrow{b}_4$
$\overrightarrow{b}_{12}$	0 1 0 0 0 1 1	$x+x^5+x^6$	$\overrightarrow{b}_7$	$\overrightarrow{b}_2$, $\overrightarrow{b}_3$, $\overrightarrow{b}_4$
$\overrightarrow{b}_{13}$	1 0 0 1 0 1 1	$1+x^3+x^5+x^6$	$\overrightarrow{b}_{14}$	$\overrightarrow{b}_1$, $\overrightarrow{b}_2$, $\overrightarrow{b}_3$, $\overrightarrow{b}_4$
$\overrightarrow{b}_{14}$	0 0 1 0 1 1 1	$x^2+x^4+x^5+x^6$	$\overrightarrow{b}_8$	$\overrightarrow{b}_3$, $\overrightarrow{b}_4$
$\overrightarrow{b}_{15}$	1 1 1 1 1 1 1	$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$	$\overrightarrow{b}_{15}$	$\overrightarrow{b}_1$, $\overrightarrow{b}_3$, $\overrightarrow{b}_4$
$\overrightarrow{b}_{16}$	0 0 0 0 0 0 0		$\overrightarrow{b}_{16}$	$\overrightarrow{b}_1$, $\overrightarrow{b}_1$

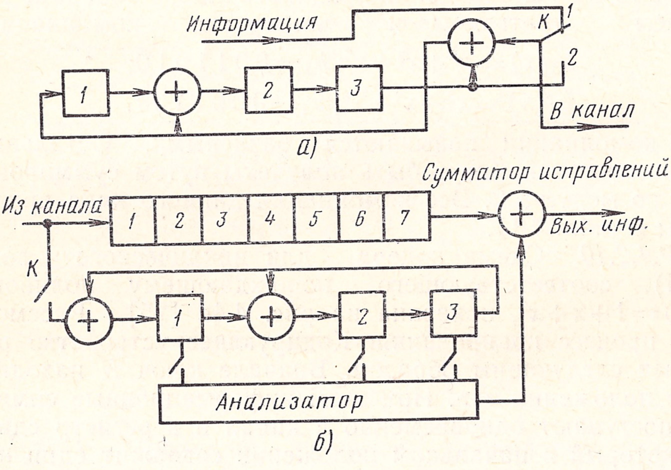


Рис. 4.4. Структурные схемы кодера (*а*) и декодера (*б*) циклического кода (7,4)

ние трех последующих тактов регистра, который выдает проверочные символы. На вход регистра теперь поступают нули (так как сумматор справа имеет два одинаковых входа), и по истечении трех тактов все ячейки регистра снова оказываются в начальном нулевом состоянии.

Формирование импульсов в регистре на каждом такте при подаче на вход информационной последовательности 0 1 1 0 показано в табл. 4.12.

ТАБЛИЦА 4.12

№ такта	Вход регистра	Состояние ячеек регистра к концу такта			Вход канала	Примечание
		№ 1	№ 2	№ 3		
1	0	0	0	0	0	Ключ в положении «1»
2	1	1	1	0	1	
3	1	1	1	1	1	
4	0	0	1	1	0	
5	0	0	0	1	1	Ключ в положении «2»
6	0	0	0	0	0	
7	0	0	0	0	0	

Схема декодирующего устройства показана на рис. 4.4*б* [25]. Рассмотрим ее работу. Кодовая комбинация из канала поступает в главный регистр, запоминается в нем и далее поступает в трехступенный регистр. После окончания кодовой комбинации ключ *К* размыкается, а анализатор состояния подключается к трехступенному регистру. Если в кодовой комбинации нет ошибок, то во всех ячейках вспомогательного регистра фикси-

ТАБЛИЦА 4.13

№ такта	Вход регистра	Состояние ячеек регистра к концу такта			Примечание
		№ 1	№ 2	№ 3	
1	0	0	0	0	Ключ *К* замкнут, анализатор отключен
2	0	0	0	0	
3	1	1	0	0	
4	0	0	1	0	
5	1	1	0	1	
6	1	0	0	0	
7	0	0	0	0	

руются нули, и из главного регистра импульсы поступают на выход. Перемена состояний регистра 2 при отсутствии ошибок показана в табл. 4.13.

Рассмотрим теперь работу декодера при наличии ошибки в принятой кодовой комбинации, например, в четвертом символе; на вход регистра поступает последовательность $\vec{b}'_1=0011110$.

В табл. 4.14 показана смена состояний регистра 2 на приеме за 7 тактов.

ТАБЛИЦА 4.14

№ такта	Вход регистра	Состояние ячеек регистра к концу такта			Примечание
		№ 1	№ 2	№ 3	
1	0	0	0	0	Ключ *К* замкнут, анализатор отключен
2	0	0	0	0	
3	1	1	0	0	
4	1	1	1	0	
5	1	1	1	1	
6	1	0	0	1	
7	0	1	1	0	

Подключенный к концу седьмого такта анализатор (ключ *К* разомкнут) обнаружит ошибку. Для определения ее местоположения анализатор может заставлять регистр делать последовательные такты. Номер такта, на котором единица появляется в 1-й ячейке и нули в остальных, определяет номер ошибочного символа. Продвигая сочетание 110 (нижняя строка табл. 4.14) по регистру, получаем сочетание 100 (табл. 4.15). Обна-

ТАБЛИЦА 4.15

№ такта	Состояние регистра к концу такта			Примечание
	№ 1	№ 2	№ 3	
1	0	1	1	Ключ *К* разомкнут, анализатор включен
2	1	1	1	
3	1	0	1	
4	1	0	0	

ружив сочетание 100 на 4-м такте, а следовательно, и номер ошибочного символа, анализатор посылает сигнал коррекции («1») на сумматор исправления.

Р.4.2.11. Очевидно, объем алфавита источника должен быть равен числу разрешенных кодовых комбинаций кода. В данном случае разрешенными являются все кодовые комбинации, содержащие единицы в любых трех разрядах из семи и нули в остальных разрядах. Их число $K = C^3_7 = 35$.

В рассматриваемом коде из общего числа комбинаций $N = 2^7 = 128$ разрешенными являются 35. Следовательно, избыточность кода согласно (4.12)

$$\rho_к = 1 - \frac{\log_2 K}{\log_2 N} = 0{,}265.$$

Кодовые комбинации, разрешенные для передачи, следующие: 1110000; 1011000; 1001100; 1000110; 1000011; 1101000; 1100100; 1100010; 1100001; 1010001; 1001001; 1000101; 0100101 и т. д. Этот код называется кодом (3/4).

Р.4.2.12. Рассматривая кодовые комбинации кода (3/4), найденные в задаче 4.2.11, легко убедиться в том, что ошибки любой кратности, приводящие к изменению числа единиц, будут обнаружены. Не обнаруживаются лишь такие ошибки, при которых некоторое число единиц переходит в нули, а такое же число нулей — в единицы (такие ошибки называются ошибками смещения).

Вероятность ошибочного приема одной из трех единиц $C^1_3 p_0 (1 - p_0)^2$, а вероятность ошибочного приема одного из четырех нулей $C^1_4 p_0 (1 - p_0)^3$. Аналогично находятся вероятности ошибочного приема двух единиц и двух нулей: $C^2_3 p^2_0 (1 - p_0)$ и $C^2_4 p^2_0 (1 - p_0)^2$, а также трех единиц и трех нулей: $C^3_3 p^3_0$ и $C^3_4 p^3_0 (1 - p_0)$.

Теперь можем найти вероятность необнаруженной ошибки

$$p_{н.о} = C^1_3 p_0 (1 - p_0)^2 C^1_4 p_0 (1 - p_0)^3 + C^2_3 p^2_0 (1 - p_0) C^2_4 p^2_0 (1 - p_0)^2 + C^3_3 p^3_0 C^3_4 p^3_0 (1 - p_0).$$

Если пренебречь весьма малой вероятностью того, что будут ошибочно приняты две единицы и два нуля или три единицы и три нуля, получим: $p_{н.о} \approx C^1_3 p_0 (1 - p_0)^2 C^4_4 p_0 (1 - p_0)^3 = 12 p^2_0 (1 - p_0)^5$. При $p_0 = 10^{-2}$ $p_{н.о} = 1{,}14 \cdot 10^{-3}$.

Р.4.2.13. Кодовые комбинации кода с четным числом единиц приведены в табл. 4.16.

ТАБЛИЦА 4.16

Номер комбинации	Номер разряда					
	1	2	3	4	5	6
1	1	0	1	1	0	1
2	0	1	0	1	0	0
3	0	0	1	0	1	0
4	1	1	0	1	0	1
5	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.

В рассматриваемом коде из общего числа комбинаций $N=2^6=64$ разрешенными являются 32. Следовательно, согласно (4.12)

$$\rho_{\text{к}}=1-\frac{\log_2 K}{\log_2 N}=0{,}168.$$

Найдем вероятность необнаруженной ошибки для такого кода. Вероятность l-кратной ошибки в n-разрядной кодовой комбинации $p_l=C^l{}_n p^l{}_0(1-p_0)^{n-l}$. Вероятность правильного приема комбинации $p_{\text{пр}}=(1-p_0)^n\,(l=0)$. Вероятность обнаруживаемой ошибки равна сумме вероятностей появления ошибок нечетной кратности (одиночной, тройной и т. д.):

$$p_{\text{о.о}}=C_n^1\,p_0\,(1-p_0)^{n-1}+C_n^3\,p_0^3\,(1-p_0)^{n-3}+$$
$$+C_n^5\,p_0^5\,(1-p_0)^{n-5}+\ldots$$

Пренебрегая малыми вероятностями ошибок высокой кратности (начиная с тройной), получим: $p_{\text{о.о}}\approx C^1{}_n p_0(1-p_0)^{n-1}$. Вероятность необнаруживаемых ошибок $p_{\text{н.о}}=1-(1-p_0)^n-C^1{}_n p_0(1-p_0)^{n-1}$. Для случая шестиразрядного кода с четным числом единиц

$$p_{\text{н.о}}=1-(1-p_0)^6-6\,p_0\,(1-p_0)^5.$$

При $p_0=10^{-2}$ $p_{\text{н.о}}\approx3\cdot10^{-3}$.

Р.4.2.14. В табл. 4.17 приведены некоторые кодовые комбинации кода с числом единиц, кратным трем. Код с числом единиц, кратным 3, позволяет обнаружить все одиночные и все четные ошибки одного знака (двойные, четверные, и т. д.). Не обнаруживаются двойные ошибки разных знаков (ошибки смещения) и ошибки одного знака, кратные 3.

ТАБЛИЦА 4.17

№ пп.	Комбинация пятиразрядного кода	Комбинация кода с числом единиц, кратным трем
1	1 0 0 1 1	1 0 0 1 1 0 0
2	0 1 0 1 0	0 1 0 1 0 1 0
3	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0 1 1
4	1 0 1 1 1	1 0 1 1 1 1 1
5	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1 0
.	. . . . .	. . . .
.	. . . . .	. . . .
.	. . . . . .	. . . .

Пренебрегая весьма малой вероятностью появления тройных ошибок, найдем вероятность появления необнаруживаемой ошибки

$$p_{\text{н.о}} = C_3^1 p_0 (1 - p_0)^2 C_4^1 p_0 (1 - p_0)^3 = 12 p_0^2 (1 - p_0)^5.$$

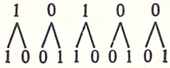
Полученный результат показывает, что семиразрядный код с числом единиц, кратным 3, дает такую же вероятность необнаруженной ошибки, что и семиразрядный код с постоянным весом (3/4). Полезно отметить, что рассматриваемый код обладает еще одной возможностью обнаружения ошибок: если первый проверочный элемент равен нулю, второй всегда равен нулю. Избыточность семиразрядного кода, в котором разрешены лишь 32 комбинации,

$$\rho_{\text{к}} = 1 - \frac{\log_2 32}{\log_2 128} = 0{,}286.$$

Р.4.2.15. Поскольку каждому элементу первичного кода ставится в соответствие два элемента корреляционного кода, число разрядов в кодовой комбинации корреляционного кода будет равно $2n$ (n — число разрядов в комбинации первичного кода). При $n=5$ корреляционный код будет десятиразрядным.

Избыточность такого кода $\rho_{\text{к}}=0{,}5$.

Рассмотрим пример построения кодовой комбинации корреляционного кода:



Нетрудно заметить, что появление необнаруживаемой ошибки возможно только в том случае, когда два рядом расположенных элемента, соответствующих одному элементу первичного кода, будут искажены так, что единица перейдет в нуль, а нуль — в единицу.

Вероятность такого события $p_{\text{н.о}}=p^2_0$. При $p_0=10^{-2}$, $p_{\text{н.о}}=10^{-4}$.

Р.4.2.16. Пример построения инверсного кода:

Комбинации первичного кода	Комбинации инверсного кода
1 0 0 1 0	$1\ 0\ 0\ 1\ 0\ \underbrace{1\ 0\ 0\ 1\ 0}$
1 0 1 1 0	$1\ 0\ 1\ 1\ 0\ \underbrace{0\ 1\ 0\ 0\ 1}_{\text{дополнительные разряды}}$

Легко убедиться, что в самом неблагоприятном случае необнаруживаемая ошибка появится, если одновременно исказятся два элемента в исходной комбинации и соответствующих им два элемента повторяемой комбинации.

Вероятность появления такого искажения приближенно равна $p_{\text{н.о}} = C^2{}_n p^4{}_0$. При $n = 5$, $p_0 = 10^{-1}$, $p_{\text{н.о}} = 10\,p^4{}_0 = 10^{-3}$.

Очевидно, что избыточность инверсного кода такая же, как и избыточность корреляционного кода (Р.4.2.15).

Р.4.2.17. Контрольные символы рекуррентного кода (1/2) найдем согласно условию (4.16):

$$b_{1,2} = 1;\quad b_{2,3} = 0;\quad b_{3,4} = 1;\quad b_{4,5} = 0;\quad b_{5,6} = 0;$$

$$b_{6,7} = 1;\quad b_{7,8} = 0;\quad b_{8,9} = 0;\quad b_{9,10} = 1;\quad b_{10,11} = 0;$$

$$b_{11,12} = 1;\quad b_{12,13} = 1;\quad b_{13,14} = 1;\quad b_{14,15} = 1.$$

Кодовая последовательность кода (1/2) для данного случая 1 1 0 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 1. Структурная схема кодера для этого кода показана на рис. 4.5*а*; структурная схема декодера — на рис. 4.5*б*. Алгоритм декодирования кода (1/2) можно сформулировать так: если условие (4.16) не выполняется для двух соседних проверочных символов, то необходимо изменить находящийся между ними информационный символ.

Р.4.2.18. Кодирование двоичной информации для передачи по методу ОФМ осуществляется устройством, схема которого представлена на рис. 4.6*а* [19].

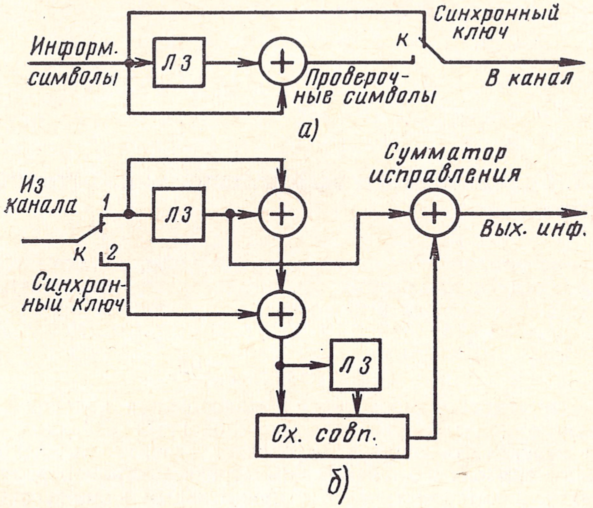

Информ. символы
ЛЗ
к
Синхронный ключ
Проверочные символы
В канал
а)
Сумматор исправления
Из канала
1
к
2
Синхронный ключ
ЛЗ
Вых. инф.
ЛЗ
Сх. совп.
б)

Рис. 4.5. Структурные схемы кодера *(а)* и декодера *(б)* для рекуррентного кода (1/2)

В этой схеме каждый символ с выхода сумматора по модулю 2 задерживается на один такт и затем суммируется по модулю 2 со следующим символом входной последовательности. В начале работы на сумматор необходимо подать вспомогательный символ «0» или «1». Например, если на вход кодера поступает последовательность 01010101010101 ..., последова-

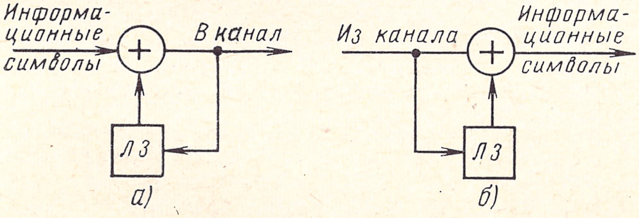
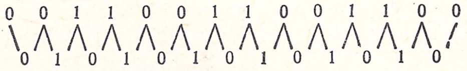

Информационные символы
В канал
ЛЗ
а)
Из канала
Информационные символы
ЛЗ
б)

Рис. 4.6. Структурные схемы кодера *(а)* и декодера *(б)* для относительного кода

тельность на его выходе имеет вид 00110011001100 . . . [19].

Декодирование осуществляется в схеме рис. 4.6*б*. Здесь входные символы задерживаются на один такт и суммируются с последующими. В результате восстанавливается исходная комбинация



4.3. Сравнительная эффективность избыточного кодирования

Параметром, по которому различные коды, а также различные системы передачи дискретных сообщений можно сравнивать между собой, является эквивалентная вероятность ошибки приема элементарного символа [24]

$$p_\text{э} = 1 - (1 - p_\text{к})^{1/k}, \qquad (4.17)$$

где $p_\text{к}$ — вероятность ошибочного декодирования кодовой комбинации данного кода; k — число информационных разрядов. Эквивалентная вероятность ошибки определяет вероятность ошибки элементарного символа в двоичном симметричном стационарном канале без памяти, в котором система с примитивным кодированием обеспечивает при передаче того же количества информации ту же вероятность ошибочного декодирования кодовой комбинации $p_\text{к}$, что и заданная система с избыточным кодом.

Сравнение систем связи, использующих различные коды, по эквивалентной вероятности ошибки $p_\text{э}$ целесообразно проводить при неизменной средней скорости передачи информации $I' = v_\text{I}(1 - p_\text{к}) = \dfrac{1}{T_\text{с}}\dfrac{k}{n}$ и фиксированной средней мощности сигнала $P_\text{с}$.

Очевидно, что корректирующий код целесообразно применять в случае, когда $p_\text{э} < p_0$, где p_0 — вероятность ошибки, которая имела бы место при использовании примитивного кода и неизменной скорости передачи информации [24]. С другой стороны из двух корректирующих кодов лучше тот, который обеспечивает меньшее значение $p_\text{э}$.

Если фиксировать спектральную плотность мощности шума $G_\text{ш}$ и I', то параметром сравнения можно сделать эквивалентное отношение *сигнал/шум*

$$h_\text{э}^2 = h^2\frac{n}{k} = \frac{P_\text{с}}{G_\text{ш} I'} = \frac{1}{\beta}, \qquad (4.18)$$

где β — коэффициент использования мощности сигнала [9]. Выигрыш по эквивалентной вероятности ошибки при переходе от i-й к i-й системе

$$\alpha_{i/j} = \frac{p_{\text{э}i}}{p_{\text{э}j}}, \quad I = \text{const}, \quad h_\text{э}^2 = \text{const}. \qquad (4.19)$$

Эффективность системы кодирования можно оценить и по энергетическому выигрышу перехода от i-й системы к j-й.

$$\eta_{Pi/j} = 10\lg \frac{h^2_{эi}}{h^2_{эj}}; \quad p_э = \mathrm{const}. \tag{4.20}$$

Задачи

4.3.1. Найти эквивалентную вероятность ошибки в однородном симметричном канале без памяти при применении «оптимального» совершенного кода $(n, 1)$, использующего двоичные кодовые комбинации

$$\vec{b}_1 = \underbrace{1\,1\,1\ldots1}_{n}, \quad \vec{b}_2 = \underbrace{0\,0\,0\ldots0}_{n},$$

если декодирование с исправлением ошибок осуществляется по минимуму хеммингова расстояния.

4.3.2. Показать, что эквивалентная вероятность ошибки при использовании совершенного кода $(3, 1)$ с кодовыми комбинациями $1\,1\,1$ и $0\,0\,0$ в однородном симметричном канале с независимыми ошибками равна $3p^2_0$ (p_0 — вероятность ошибочной регистрации элементарного символа).

4.3.3. Найти эквивалентную вероятность ошибки для линейного кода $(7, 4)$. Определить выигрыш по эквивалентной вероятности ошибки при переходе от примитивного кодирования к кодированию кодом $(7, 4)$, если $p_0 = 10^{-3}$.

4.3.4. Найти энергетический выигрыш перехода от системы с примитивным кодированием к системе с кодом $(7, 4)$ в канале со случайной фазой и ортогональными в усиленном смысле сигналами при $I' = \mathrm{const}$ и $p_э = \mathrm{const}$ ($p_э = 10^{-4}$).

4.3.5. В канале с медленными рэлеевскими замираниями передача информации осуществляется примитивным кодом и кодом $(7, 4)$. Какой выигрыш по эквивалентной вероятности ошибки дает использование кода $(7, 4)$, если вероятность ошибки в регистрации одного символа (вероятность ошибочного перехода) $p_0 = 10^{-3}$. Чему будет равен в указанных условиях энергетический выигрыш?

4.3.6. Код $(7, 4)$ используется для передачи информации в канале с быстрыми рэлеевскими замираниями при вероятности ошибки в приеме элементарного символа $p_0 = 10^{-4}$. Какой выигрыш по эквивалентной вероятности ошибки и энергетический выигрыш дает применение кода (7, 4) по сравнению с примитивным кодом?

4.3.7. Для передачи информации в гауссовском канале с неопределенной фазой и ортогональными в усиленном смысле сигналами использован код (3, 1) с кодовыми комбинациями 000 и 111. Коэффициент передачи канала γ. Вычислить выигрыш по эквивалентной вероятности ошибки при переходе от поэлементного приема к приему в целом.

4.3.8. В канале с постоянными параметрами при наличии аддитивного стационарного нормального «белого шума» осуществляется оптимальный когерентный прием двоичных сигналов ЧМ при вероятности ошибки $p_0 = \frac{1}{2}[1 - \Phi(\sqrt{h^2{}_0})]$. В этих условиях предполагается использовать корректирующий (n, k)-код, исправляющий ошибки максимальной кратности $q_и$. Определить условия, при которых такой код целесообразно использовать, полагая, что $h^2{}_0 = \frac{\gamma^2 E}{G_ш} \gg 1$.

4.3.9. Рассмотренный в задаче 4.2.9 циклический код (7, 4) исправляет все одиночные ошибки. Целесообразно ли применение этого кода при осуществлении оптимального когерентного приема?

4.3.10. Целесообразно ли применение кода (3, 1), исправляющего все одиночные ошибки, при поэлементном оптимальном когерентном приеме? Какую максимальную избыточность должен иметь код, исправляющий все одиночные ошибки, чтобы его целесообразно было применять в указанных условиях?

Решения и ответы

Р.4.3.1. При декодировании с исправлением ошибок по минимуму хеммингова расстояния кодовая комбинация будет принята с ошибкой, если в ней искажено более чем $[n/2]$ кодовых символов ($[n/2]$ — целая часть от $n/2$). Следовательно, вероятность ошибочного декодирования кодовой комбинации данного кода

$$p_к = \sum_{i=[n/2]+1}^{n} C_n^i \, p_0^i (1 - p_0)^{n-i}.$$

Эквивалентная вероятность ошибки согласно (4.17) $p_э = 1 - (1 - p_к)^{\frac{1}{k}}$. Так как в данном случае число информационных символов $k=1$

$$p_э = p_к = \sum_{i=[n/2]+1}^{n} C_n^i \, p_0^i (1 - p_0)^{n-i}.$$

Р.4.3.2. При декодировании по минимуму хэммингова расстояния вероятность ошибочного декодирования кодовой комбинации кода (3, 1)

$$p_к = C_3^3 \, p_0^3 + C_3^2 \, p_0^2 (1 - p_0) = p_0^3 + 3 \, p_0^2 (1 - p_0) = 3 \, p_0^2 - 2 \, p_0^3.$$

Согласно Р.4.3.1 для кода (3, 1) $p_э = p_к = 3p^2{}_0 - 2p^3{}_0$. Если $p_0 \ll 1$, то вторым слагаемым в этом выражении можно пренебречь и считать, что $p_э \approx 3p^2{}_0$.

Р.4.3.3. Код (7, 4), содержащий четыре информационных и три проверочных символа, позволяет исправить все одиночные ошибки. Поэтому комбинация кода (7, 4) будет декодирована правильно, если все символы приняты верно либо один из 7 символов принят ошибочно. При независимых ошибках вероятность правильного декодирования

$$1 - p_к = (1 - p_0)^7 + 7 \, p_0 (1 - p_0)^6.$$

При $p_0 \ll 1$, пользуясь формулой бинома Ньютона и пренебрегая слагаемыми высшего порядка малости, получаем

$$1 - p_к \approx 1 - 7p_0 + 21 \, p_0^2 + 7 \, p_0 - 42 \, p_0^2 = 1 - 21 \, p_0^2.$$

Таким образом, $p_к = 21 \, p^2{}_0$ и согласно (4.17)

$$p_э = 1 - \sqrt[4]{1 - 21 \, p_0^2} \approx 5{,}25 \, p_0^2.$$

При примитивном кодировании кодом (n, n) вероятность ошибочного декодирования равна вероятности того, что хотя бы один символ в кодовой комбинации принят с ошибкой: $p_к = 1 - (1 - p_0)^4 \approx 4p_0$. Следовательно, $p_э = 1 - \sqrt[4]{1 - 4p_0} \approx p_0$. Выигрыш по вероятности ошибки при переходе от кода (4, 4) к коду (7, 4)

$$\alpha_{(4,4)(7,4)} = \frac{p_0}{5{,}25 \, p_0^2} = 190.$$

Таким образом, переход от примитивного кодирования к кодированию кодом (7, 4) позволяет уменьшить эквивалентную вероятность ошибки на два порядка.

Р.4.3.4. Воспользовавшись соотношениями для $p_{э\,(7,4)}$ и $p_{э\,(n,n)}$, найденными в решении предыдущей задачи, определяем при $p_{\text{э}}=\text{const}$

$$h^2_{\text{э}\,(7,4)} = \frac{7}{4}\ln\left(\frac{1,31}{p_{\text{э}}}\right);\quad h^2_{\text{э}\,(n\;n)} = 2\ln\left(\frac{1}{2\,p_{\text{э}}}\right).$$

Отсюда согласно (4.20)

$$\eta_{P\,(n,n)/(7(4)} = 10\lg\frac{8\ln\dfrac{1}{2\,p_{\text{э}}}}{7\left(\ln 2,62+\ln\dfrac{1}{2\,p_{\text{э}}}\right)};$$

При $p_{\text{э}}=10^{-3}$ $\eta_{P(n,n)\;(7,4)}\approx 10\lg\frac{8}{7}\approx 0,6$ дБ.

Р.4.3.5. Коэффициент передачи канала с медленными рэлеевскими замираниями имеет плотность вероятности

$$w_1(\gamma) = \frac{2\gamma}{\overline{\gamma^2}}\exp\left(-\frac{\gamma^2}{\overline{\gamma^2}}\right).$$

Эквивалентную вероятность ошибки для кода (n,n) и кода (7,4) находим, усредняя по всем значениям γ выражения, полученные в Р.4.3.3, с учетом ф-лы (4.18):

$$p_{\text{э}\,(7,4)} = \frac{5,25}{4}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{4\gamma^2 P_{\text{с}}}{7\,G_{\text{ш}}\,l'}\right)w_1(\gamma)\,d\gamma = \frac{1,31}{1+\dfrac{4}{7}\,\overline{h^2_{\text{э}}}};$$

$$p_{\text{э}\,(n,n)} = p_0 = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\gamma^2 P_{\text{с}}}{2\,G_{\text{ш}}\,l'}\right)w_1(\gamma)\,d\gamma = \frac{1}{2+\overline{h^2_{\text{э}}}},$$

где $\overline{h^2_{\text{э}}} = \dfrac{\overline{\gamma^2}\,P_{\text{с}}}{G_{\text{ш}}\,l'}$ — среднее значение $h^2_{\text{э}}$.

Выигрыш по эквивалентной вероятности ошибки в данном случае

$$\alpha_{(n,n)/(7,\;4)} = \frac{1+\dfrac{4}{7}\,\overline{h^2_{\text{э}}}}{1,31\left(2+\overline{h^2_{\text{э}}}\right)}.$$

При $\overline{h}^2_{\text{э}}\gg 1$ $\alpha_{(n,n)/(7,4)}\approx 0,4$.

Из полученных для $p_{\text{э}\,(7,4)}$ и $p_{\text{э}\,(n,n)}$ соотношений находим при $p_{\text{э}}=\text{const}$

$$h^2_{\text{э}\,(7,4)} = \frac{7}{4}\left(\frac{1,31}{p_{\text{э}}}-1\right);\quad h^2_{\text{э}\,(n,n)} = \frac{1}{p_{\text{э}}}-2.$$

Согласно (4.20)

$$\eta_{P\,(n,n)/(7,4)} = 10\lg\frac{4\left(\frac{1}{p_э} - 2\right)}{7\left(\frac{1,31}{p_э} - 1\right)}.$$

При $p_э \ll 1$ $\eta_{P\,(n,n)/(7,4)} \approx -4$ дБ.

Таким образом, переход к избыточному кодированию в канале с медленными замираниями неэффективен, так как сопровождается энергетическим проигрышем. Этот результат объясняется тем, что при медленных замираниях коэффициент передачи канала оказывается близким к нулю в течение времени, превышающем длительность одной кодовой комбинации, в результате чего избыточности кода (7,4) недостаточно для ее правильного декодирования.

Р.4.3.6. При быстрых замираниях коэффициент передачи канала случайно меняется от одной посылки к другой. В этом случае средняя вероятность ошибки элементарного символа с учетом ф-лы (4.18)

$$p_0 = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right) w_1(\gamma)\, d\gamma = \frac{1}{2 + \overline{h_э^2}\,\frac{k}{n}}.$$

Следовательно, для кода (7,4) согласно Р.4.3.3 $p_{э\,(7,4)} = \frac{5,25}{(2+\frac{4}{7}\overline{h_э^2})^2}$

Для кода (n,n)

$$p_{э\,(n,n)} = \frac{1}{2 + \overline{h_э^2}};\quad \alpha_{(n(n)/(7,4)} = \frac{\left(2 + \frac{4}{7}\overline{h_э^2}\right)^2}{\left(2 + \overline{h_э^2}\right)5,25}.$$

При $p_{э(n,n)} = 10^{-4}$ $h^2{}_э = 10^4$ и $\alpha_{(n,n)/(7,4)} = 600$. Энергетический выигрыш при $p_э = 10^{-4}$ $\eta_{P\,(n,n)/(7,4)} = 10\lg\frac{1}{4\sqrt{p_э}} =$ $= 14$ дБ. Следовательно, переход от примитивного кодирования к избыточному в канале с быстрыми замираниями следует считать эффективным, так как такой переход дает ощутимый энергетический выигрыш. Этот результат вытекает из того, что при быстрых замираниях поражаются лишь некоторые символы кодовой комбинации. Их можно восстановить, используя избыточность кода (7,4).

Р.4.3.7. Согласно Р.4.3.2 при поэлементном приеме

$$p_{э\,(п.п)}=\frac{3}{4}\exp\left(-\frac{1}{3}h_э^2\right);\quad h_э^2=3\,h_0^2.$$

При приеме в целом можно считать, что длительность сигналов, ортогональных в усиленном смысле, равна $3T$. В этом случае вероятность ошибочного декодирования кодовой комбинации

$$p_к=\frac{1}{2}\exp\left(-3\,\frac{h_0^2}{2}\right);$$

$$p_{э.п.ц,}=p_к=\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{h_э^2}{2}\right)..$$

Выигрыш по вероятности ошибки

$$\alpha_{п.п/п.ц}=\frac{\frac{3}{4}\exp\left(-\frac{1}{3}h_э^2\right)}{\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}h_э^2\right)}=1{,}5\exp\left(\frac{h_э^2}{6}\right).$$

Энергетический выигрыш

$$\eta_{P.п.п/п.ц}=10\lg\frac{h^2_{э.п.п}}{h_{э.п.ц}}=10\lg\left[1{,}5\,\frac{\ln\left(\frac{3}{4\,p_э}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2\,p_э}\right)}\right].$$

При $p_э\ll 1$

$$\eta_{P_{п.п/п.ц}}\approx 10\lg 1{,}5=1{,}76\ \text{дБ}.$$

Р.4.3.8. При $p_0\ll 1$ эквивалентная вероятность ошибки кода (n,k), исправляющего все ошибки кратности $q_и$ и не исправляющего ошибок кратности $q_и+1$ [24],

$$p_э=\frac{n}{k}\,p_0^{q_и+1}.$$

При когерентном приеме ЧМ $p_0=\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\sqrt{h_0^2}\right)\right]$. В случае использования примитивного кода при той же скорости передачи информации $p'_0=\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{k}h_0^2}\right)\right]$, так как длительность элемента сигнала, а также и энергия его увеличиваются в n/k раз. Используя асимптотическую формулу $\frac{1}{2}[1-\Phi(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-x^2/2}$, находим

$$\lim_{h_0\to\infty}\frac{p_{\text{э}}}{p_0'}=\frac{\frac{n}{k}}{\sqrt{1-\rho_{\text{к}}}\,(\sqrt{2\pi})^{q_{\text{и}}}\,h_0^{q_{\text{и}}+1}}\times$$

$$\times\exp\left\{\left(\frac{1}{1-\rho_{\text{к}}}-q_{\text{и}}-1\right)\frac{h_0^2}{2}\right\}.$$

Здесь $\rho_{\text{к}}=1-k/n$ — избыточность кода. Если $\frac{1}{1-\rho_{\text{к}}}>q_{\text{и}}+1$, то $\lim\limits_{h_0\to\infty}\frac{p_{\text{э}}}{p_0'}=\infty$, т. е. $p_{\text{э}}>p'_0$, и код (n,k) применять нецелесообразно. Если $\frac{1}{1-\rho_{\text{к}}}<q_{\text{и}}+1$, то $\lim\limits_{h_0\to\infty}\frac{p_{\text{э}}}{p_0'}=0$, и при некоторых h_0 $p_{\text{э}}<p'_0$. Следовательно, корректирующий код (n,k) целесообразно применять при условии $q_{\text{и}}\geqslant\frac{\rho_{\text{к}}}{1-\rho_{\text{к}}}$.

Р.4.3.9. Условием целесообразности применения корректирующего кода (n,k) является

$$q_{\text{и}}\geqslant\frac{\rho_{\text{к}}}{1-\rho_{\text{к}}}.$$

В данном случае $q_{\text{и}}=1$ и $\rho_{\text{к}}=1-\frac{k}{n}=\frac{3}{7}$. Очевидно, что $\frac{\rho_{\text{к}}}{1-\rho_{\text{к}}}\leqslant 1$. Следовательно, код (7,4) в указанных условиях применять целесообразно.

Р.4.3.10. Код (3.1) применять нецелесообразно, так как избыточность кода (3,1) $\rho_{\text{к}}=\frac{2}{3}$ и $\frac{\rho_{\text{к}}}{1-\rho_{\text{к}}}=2>q_{\text{и}}=1$. Очевидно, что избыточность кода (n,k), который целесообразно применять в канале с точно известными параметрами, удовлетворяет условию

$$q_{\text{и}}\geqslant\frac{\rho_{\text{к}}}{1-\rho_{\text{к}}}\quad\text{или}\quad\rho_{\text{к}}\leqslant\frac{q_{\text{и}}}{q_{\text{и}}+1}.$$

Отсюда предельная избыточность кода, исправляющего одиночные ошибки, применение которого целесообразно при оптимальном когерентном приеме, $\rho_{\text{к}}=0{,}5$.

Глава 5

ПЕРЕДАЧА ДИСКРЕТНЫХ СООБЩЕНИЙ

5.1. Критерии оптимального приема. Алгоритмы оптимального приема при точно известном сигнале

Здесь рассматриваются лишь синхронные системы связи (элементарные символы имеют неизменную длительность T и начало отсчета фиксировано) и поэлементные методы приема дискретных сообщений (последовательное вынесение приемником решения об отдельных элементарных кодовых символах $b_{k,i}$; $k=1, 2, 3, \ldots$ — номер последовательно передаваемого элементарного символа; $i=1, 2, 3, \ldots$ — номер позиции кодового символа).

Одним из наиболее широко распространенных критериев оптимального приема дискретных сообщений является критерий минимума средней вероятности ошибки (критерий идеального наблюдателя).

Алгоритм работы приемника, оптимального по критерию идеального наблюдателя, можно записать так:

$$P\left(b_{k,i}/z(t)\right) \underset{b_j}{\overset{b_i}{\gtrless}} P\left(b_{k,j}/z(t)\right),\ i \neq j,\ i=1,2,\ .\ .\ .,\ m \tag{5.1}$$

или

$$P\left(b_{k,i}\right) w_1\left(z(t)/b_{k,i}\right) \underset{b_j}{\overset{b_i}{\gtrless}} P\left(b_{k,j}\right) w_1\left(z(t)/b_{k,j}\right), \tag{5.2}$$

т. е. сводится к проверке системы из $(m-1)$ неравенств: регистрируется номер символа, который максимизирует сравниваемые величины. Здесь $P(b_{k,i}/z(t))$ — апостериорная вероятность передачи символа b_{ki} при фиксации на интервале анализа $(0, T_а)$ реализации принимаемого колебания (сигнал+шум) $z(t)$; $w_1(z(t)/b_{k,i})$ — функция правдоподобия передачи символа $b_{k,i}$ при фиксации $z(t)$. При непрерывном времени эту функцию называют функционалом правдоподобия[1].

Приемник, работающий в соответствии с алгоритмом

$$w_1\left(z(t)/b_{k,i}\right) \underset{b_j}{\overset{b_i}{\gtrless}} w_1\left(z(t)/b_{k,j}\right), \tag{5.3}$$

называют оптимальным по критерию максимального правдоподобия. Очевидно, что, если все символы равновероятны, (5.3) следует из (5.2) и этот алгоритм обеспечивает минимизацию средней вероятности ошибки. При неизвестных априорных вероятностях $P(b_{k,i})$ оптимальный прием в системах связи чаще всего осуществляют по алгоритму (5.3).

---

[1] В задачах оптимальной обработки будем интересоваться отношениями функционалов правдоподобия, которое, в отличие от самого функционала, сходится во всех представляющих основной практический интерес ситуациях.

Логарифмируя левые и правые части (5.2), запишем этот алгоритм в эквивалентном виде

$$\ln w_1\left(z(t)/b_{k,i}\right)+\ln P\left(b_{k,i}\right)\overset{b_i}{\underset{b_j}{\gtrless}}\ln w_1\left(z(t)/b_{k,j}\right)+\ln P\left(b_{k,j}\right). \quad (5.4)$$

Интервал анализа на приеме $T_{\text{а}}$ не всегда совпадает с тактовым интервалом на передаче T.
Примем, что

$$T_{\text{а}}=(1+D)\,T, \quad D=0,1,2,3\ \ldots \quad (5.5)$$

Величину D называют фиксированной задержкой в принятии решения об элементарном символе.

Если сигналы соседних символов перекрываются в месте приема [канал с межсимвольной интерференцией, порожденной линейными искажениями (переходным процессом) или, как говорят, памятью канала], то при оптимальной обработке и учете всей энергии принимаемого сигнала приходится брать $D>0$. Конкретная величина D связана с параметром $L=\tau_{\text{пер}}/T=0,\ 1,\ 2,\ldots$ — относительной памятью канала; $\tau_{\text{пер}}$ — практическая протяженность импульсной переходной характеристики канала. При пренебрежении межсимвольной интерференцией чаще всего берут $T_{\text{а}}=T$. Для каналов с межсимвольной интерференцией ($L>0$) могут быть построены приемные устройства, когда $D<L$ (неполный учет энергии принимаемых сигналов) и $D\geqslant L$ (полный учет энергии принимаемых сигналов). При независимых и равных вероятностях передачи кодовых символов

$$w_1\left(z(t)/b_{k,i}\right)=\sum_{k^{(L)}=1}^{m^L}\ \sum_{k^{(D)}=1}^{m^D} w_1\left(z(t)/B_{k^{(L)}-L}^{k^{(L)}-1},\ b_{k,i},\ B_{k^{(D)}+1}^{k^{(D)}+D}\right), \quad (5.6)$$

где $w_1(z(t)/B_{k(L)-L}^{k(L)-1},\ b_{k,i},\ B_{k(D)+1}^{k(D)+D}$ — функция правдоподобия того, что при фиксации $z(t)$ на интервале $T_{\text{а}}$ k-й символ имел номер i, до него передавались символы $b_{k-1},\ b_{k-2},\ \ldots,\ b_{k-L}$, а после него — символы $b_{k+1},\ b_{k+2},\ \ldots,\ b_{k+D}$.

Выражение (5.6) можно рассматривать как усредненную функцию правдоподобия (по символам, переданным до и после анализируемого); m^D — число различных цепочек символов, которые могли быть переданы на интервале анализа после k-го символа; m^L — число различных цепочек символов, последействия («хвосты») которых могут влиять на интервале анализа k-го символа.

В условиях достаточно надежной связи (которые и должны быть обеспечены в современных системах передачи дискретных сообщений) можно считать, что символы, зафиксированные до анализируемого (k-го), действительно переданы по каналу (с вероятностью, близкой к 1). Это означает, что на интервале анализа $T_{\text{а}}$ может быть (посредством «идеальной» обратной связи по решению) почти точно восстановлен сигнал $g_{\text{ост}}(t)$, порожденный «хвостами» предшествующих символов, и вместо (5.6) можно написать

$$w_1\left(z(t)/b_{k,i}\right) = \sum_{k^{(D)}=1}^{m^D} w_1\left(z(t) - g_{\text{ост}}(t)/b_{k,i},\ B_{k^D+1}^{k^{(D)}+D}\right). \quad (5.7)$$

Обозначим через $s_{r,i}(t)$ $(r=1, 2, \ldots, m)$ r-ю реализацию принимаемого сигнала, обусловленную на интервале $T_{\text{а}}$ i-й позицией k-го символа, L предшествующими символами и D последующими символами. Если сигналы $s'_{r,i}(t)$ известны точно в месте приема, а на интервале $T_{\text{а}}$ имеется реализация $u(t)$ аддитивного стационарного шума с плотностью вероятности (в общем случае многомерной) $w(u(t))$, то

$$w\left(z(t)/B_{k^{(L)}-L,r}^{k^{(D)}-1},\ b_{k,i},\ B_{k^{(D)}+1,r}^{k^{(D)}+D}\right) = w\left(u(t) = z(t) - s'_{r,i}(t)\right). \quad (5.8)$$

Индекс r слева означает, что берется цепочка символов до и после анализируемого, порождающая сигнал $s'_{r,i}(t)$.

Задачи

5.1.1. По каналу связи без памяти передаются двоичные символы b_1 и b_2 с вероятностями $P(b_1)=0{,}6$; $P(b_2)=0{,}4$, причем символ b_1 определяется в месте приема на интервале T сигналом $s_1(t)=0$, а символ b_2 — сигналом $s_2(t)=a$ (двоичная АИМ). В канале действует нормальный стационарный шум с дисперсией $\sigma^2 = 10^{-4}$ Вт. Сигналы $s_1(t) = 0$ и $s^2(t) = 10^{-2}$ В известны точно в месте приема. Какой символ зарегистрирует приемник, оптимальный по критерию минимума средней вероятности ошибки, принимающий решение по одному отсчету смеси $z(t)=s'(t)+u(t)$ на интервале T, если в момент принятия решения $z = 0{,}008$В? Изобразите структурную схему этого приемника.

5.1.2. Приемник по одному отсчету выносит решение в пользу символа b_1, если отсчет принимаемой реализации $z(t)$ меньше некоторого порога U_0; в противном случае выносится решение в пользу символа b_2 (см. Р.5.1.1). Определить пороговое значение U_0 для приемника, оптимального по критерию минимума средней вероятности ошибки, если передаваемым двоичным символам b_1 и b_2, имеющим априорные вероятности $P(b_1)$ и $P(b_2)$, соответствуют канальные сигналы $s'_1=a$ и $s'_2=-a$, а в канале без памяти имеется нормальный стационарный шум с дисперсией σ^2.

5.1.3. Двоичные сигналы и канал те же, что в задаче 5.1.2. Приемное устройство принимает решение о переданном символе по трем независимым отсчетам —

z_1, z_2 и z_3 — принимаемой смеси (в точках $t_1=T/3$, $t_2=\frac{2}{3}T$, $t_3=T$).

Найти алгоритм работы приемника, оптимального по критерию минимума средней вероятности ошибки, и изобразить его структурную схему. Чему равен оптимальный порог U_0 при равновероятных символах?

5.1.4. Символам $b_i (i=1, 2, 3, ..., m)$ с вероятностями $P(b_i)$ соответствуют известные точно в месте приема сигналы $s'_i(t)$, определенные на интервале $(0, T_{\text{а}})$. В канале имеется стационарный нормальный «белый шум» с энергетическим спектром $G_{\text{ш}}$.

Показать, что при отсутствии межсимвольной интерференции и анализе принимаемого колебания (сигнал+шум) на всем интервале $(0, T_{\text{а}})$ алгоритм работы приемника, минимизирующего среднюю вероятность ошибки (приемника Котельникова), может быть записан в виде

$$\int_0^{T_{\text{а}}} [z(t)-s'_i(t)]^2\,dt - G_{\text{ш}} \ln P(b_i) \mathop{\lessgtr}\limits^{b_i}_{b_j} \int_0^{T_{\text{а}}} [z(t)-s'_j(t)]^2\,dt - G_{\text{ш}} \ln P(b_j). \tag{5.9}$$

Показать возможность реализации алгоритма (5.9) с помощью нелинейной схемы, содержащей квадратирующие устройства.

5.1.5. Показать, что в условиях задачи 5.1.4 алгоритм оптимального приема может быть записан в виде

$$\int_0^{T_{\text{а}}} z(t)\,s'_i(t)\,dt - \frac{1}{2}\left[E'_i + G_{\text{ш}} \ln P(b_i)\right] \mathop{\gtrless}\limits^{b_i}_{b_j} \int_0^{T_{\text{а}}} z(t)\,s'_j(t)\,dt - \frac{1}{2}\left[E'_j + G_{\text{ш}} \ln P(b_j)\right], \tag{5.10}$$

где $E'_i=\int_0^T s'^2_i(t)\,dt$ — энергия сигнала $s'_i(t)$, и реализован с помощью корреляционной схемы. Какие возможны упрощения в реализации оптимального приемника, если реализации сигналов $s'_i(t)$ имеют равные энергии и равные вероятности?

5.1.6. Покажите, что если в условиях задачи 5.1.5 для передачи используются двоичные символы «1» и «0» с вероятностями $P(1)$ и $P(0)$, то алгоритм оптимального приема может быть записан так:

$$\int\limits_0^{T_\text{a}} z(t)\,[\,s_1'(t) - s_2'(t)]^2\,dt \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} U_0;$$

$$U_0 = \frac{1}{2}\left[E_1' - E_2' + G_\text{ш}\ln\frac{P(0)}{P(1)}\right] \qquad (5.11)$$

и реализуется одноканальной схемой. Чему равен оптимальный порог U_0, если $P(1) = P(0)$ и:

а) используется двоичная система с пассивной паузой (АМ);

б) используется двоичная система с активной паузой $(E'_1 = E'_2)$;

в) используется двоичная система с активной паузой и противоположными сигнала $s'_1(t) = -s'_2(t)$ (например, ФМ с манипуляцией на π)?

5.1.7. При заданной реализации принимаемой смеси $z(t)$ апостериорные вероятности передаваемых символов «1» и «0» равны $P(1/z) = 0{,}6$ и $P(0/z) = 0{,}4$. Какой символ зарегистрирует приемник, оптимальный по критерию идеального наблюдателя?

5.1.8. Символам b_1 и b_2, имеющим априорные вероятности $P(b_1)$ и $P(b_2)$, соответствуют на интервале $(0, T)$ принимаемые сигналы $s'_1(t)$ и $s'_2(t)$, заданные в виде точек $\vec{s}'_1$ и $\vec{s}'_2$ функционального пространства с метрикой Гильберта. В этом же пространстве точками $\vec{z}(t)$ определены реализации принимаемой смеси $z(t)$ (сигнал + шум). Разбить пространство сигналов $z(t)$ на две непересекающиеся области Λ_1 и Λ_2, приписываемые решениям соответственно в пользу символов b_1 и b_2 (собственные области) в предположении того, что сигналы в месте приема известны точно, в канале без памяти имеется стационарный гауссовский белый шум с энергетическим спектром $G_\text{ш}$, принимаемое колебание анализируется на интервале $(0, T)$ оптимальным приемником Котельникова, минимизирующим среднюю вероятность ошибки. Как будет проходить граница между собственными областями, если символы будут равновероятны?

5.1.9. Независимым и равновероятным двоичным символам «1» и «0» при фазовой манипуляции на π соответствуют в канале с памятью $(L = 1)$ ожидаемые элементарные сигналы

$$s_1'(t) = g_1(t)\,h(t) + g_2(t-T)\,h(t-T), \quad s_2'(t) = -s_1'(t), \tag{5.12}$$

где $g_1(t)$ — сигнал, определенный на интервале $(0, T)$; $g_2(t)$ — сигнал, определенный на интервале $(T, 2T)$ (рис. 5.1);

$$h(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \leqslant x < T, \\ 0 \text{ при } x < 0;\ x > T. \end{cases}$$

Сигналы $g_1(t)$ и $g_2(t)$ известны точно в месте приема. Определить алгоритм оптимального приема на интервале $T_а = 2T$ при флуктуационном белом шуме с энергетическим спектром $G_ш$ по критерию идеального наблюдателя. Наметить структурную схему приемника, реализующего этот алгоритм.

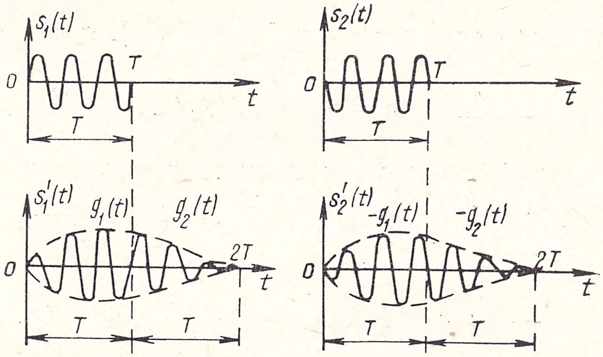


Рис. 5.1. Сигналы ФМ на входе и выходе канала с памятью

5.1.10. Найти алгоритм оптимального приема в условиях задачи 5.1.9, полагая, что имеется «идеальная» обратная связь по решению (можно восстановить сигнал $g_{ост}(t)$ по зарегистрированным символам). Какова структурная схема приемного устройства?

5.1.11. Найти алгоритм оптимального приема в условиях задачи 5.1.10, полагая, что анализ принимаемой смеси $z(t)$ ведется на интервале $T_а = T\,(D = 0)$. Какой схемой можно его реализовать?

Решения и ответы

Р.5.1.1. Функции правдоподобия передачи символа b_1 и b_2 при заданном отсчете $z(t)$ определяются одномерными плотностями вероятности:

$$w_1(z/b_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right);$$

$$w_1(z/b_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

В условиях задачи алгоритм (5.3) можно записать так:

$$P(b_1)\exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \overset{b_1}{\underset{b_2}{\gtrless}} P(b_2)\exp\left(-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right). \qquad (5.13)$$

Подставляя сюда значения $P(b_1)$, $P(b_2)$, z, a и σ^2, находим

$$P(b_1)\exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) = 0{,}435; \quad P(b_2)\exp\left(-\frac{(z-a)^2}{2\,\sigma^2}\right) = 0{,}392.$$

Следовательно, приемник примет решение в пользу символа b_1 и зарегистрирует его.

После логарифмирования соотношение (5.13) можно записать так:

$$-\frac{z^2}{2\sigma^2} + \ln P(b_1) \overset{b_1}{\underset{b_2}{\gtrless}} -\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2} + \ln P(b_2). \qquad (5.14)$$

После элементарных преобразований алгоритм приема примет вид

$$z \overset{b_2}{\underset{b_1}{\gtrless}} U_0, \qquad (5.15)$$

где пороговый уровень, при превышении которого отсчетом $z(t)$ регистрируется символ b_2, а в противном случае — b_1,

$$U_0 = \frac{\sigma^2}{a} \ln\frac{P(b_1)}{P(b_2)} + \frac{a}{2}.$$

Структурная схема приемника, реализующего алгоритм (5.15), показана на рис. 5.2. Она содержит следующие блоки: $Г$ — генератор очень коротких тактовых импульсов с частотой следования $1/T$, которые осуществляют выборку отсчетов входной смеси $z(t)$; K — ключ, осуществляющий квантование во времени входной смеси; *ССВ* — схема сравнения с порогом U_0 и выбора решения (если $z > U_0$, регистрируется символ b_2, в противном случае — b_1); *УП* — устройство памяти (хранения) регистрируемых элементарных символов; *Дек* — декодирующее устройство.

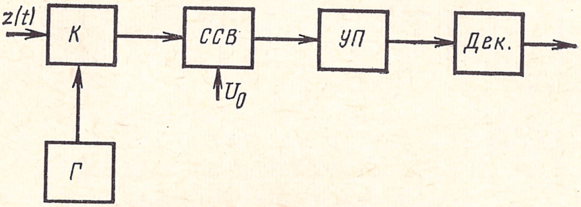


Рис. 5.2. Структурная схема оптимального приемника по одному отсчету при точно известном сигнале

Р.5.1.2. Аналогично (5.14) интересующий нас алгоритм приема можно записать в виде

$$-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}+\ln P(b_1)\underset{b_2}{\overset{b_1}{\gtrless}}-\frac{(z+a)^2}{2\sigma^2}+\ln P(b_2),$$

или после тождественных преобразований

$$z\underset{b_2}{\overset{b_1}{\gtrless}}U_0,\ U_0=\frac{\sigma^2}{2a}\ln\frac{P(b_2)}{P(b_1)}.$$

Если вероятности передачи символов равны, то оптимальный порог для анализируемых сигналов $U_0=0$.

Р.5.1.3. Функции правдоподобия передачи символов b_1 и b_2 при заданных отсчетах z_1, z_2 и z_3 определяются трехмерными плотностями вероятности:

$$w_3(z/b_1)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^3\exp\left[-\frac{(z_1-a)^2}{2\sigma^2}-\frac{(z_2-a)^2}{2\sigma^2}-\frac{(z_3-a)^2}{2\sigma^2}\right];$$

$$w_3(z/b_2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^3\exp\left[-\frac{(z_1+a)^2}{2\sigma^2}-\frac{(z_2+a)^2}{2\sigma^2}-\frac{(z_3+a)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Согласно (5.5) и после элементарных преобразований алгоритм приема принимает вид

$$z_1+z_2+z_3\underset{b_2}{\overset{b_1}{\gtrless}}U_0,\ U_0=\frac{\sigma^2}{2a}\ln\frac{P(b_2)}{P(b_1)}.$$

При равновероятных символах порог $U_0=0$. Схема приемника отличается от схемы рис. 5.2 наличием блока суммирования (интегрирования) отсчетов входного

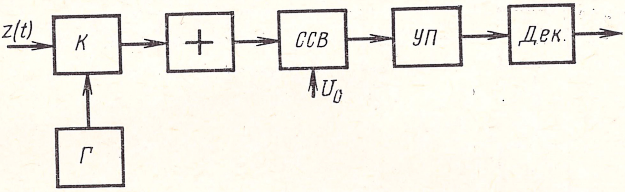

z(t)
К
+
ССВ
УП
Дек.
U_0
Г

Рис. 5.3. Структурная схема оптимального приемника по трем отсчетам при точно известном сигнале

сигнала[1] (рис. 5.3). Генератор *Г* выдает короткие импульсы с частотой следования $3/T$.

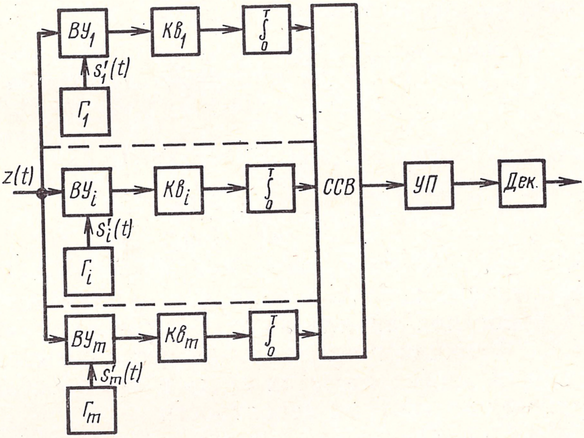

ВУ$_1$
Кв$_1$
$\int_0^T$
$s_1'(t)$
Г$_1$
z(t)
ВУ$_i$
Кв$_i$
$\int_0^T$
ССВ
УП
Дек.
$s_i'(t)$
Г$_i$
ВУ$_m$
Кв$_m$
$\int_0^T$
$s_m'(t)$
Г$_m$

Рис. 5.4. Реализация оптимального приемного устройства по критерию максимального правдоподобия при точно известном ансамбле сигналов

Р.5.1.4. Функционал правдоподобия передачи символа b_i при фиксации $z(t)$ с учетом (2.4) и (5.8) можно записать в виде

---

[1] После принятия решения сумматор надо привести к нулевым начальным условиям.

$$w(z(t)/b_i) = K \exp\left[-\frac{1}{G_{\text{ш}}}\int_0^{T_0}[z(t) - s'_i(t)]^2\,dt\right]. \qquad (5.16)$$

Тогда согласно (5.4) следует алгоритм приема (5.9). На рис. 5.4 показана схема, реализующая этот алгоритм. Она содержит: m генераторов опорных сигналов $s'_i(t)$, m вычитающих устройств, m квадратирующих (нелинейных) устройств, на выходе которых в момент времени t напряжение равно $[z(t) - s'_i(t)]^2$, m интеграторов «$\int$», схему сравнения и выбора *ССВ*, устройство памяти кодовых символов *УП*, декодер[1]. Если все символы имеют равные вероятности, то алгоритм приема

$$\int_0^{T_a}[z(t) - s'_i(t)]^2\,dt \mathop{\gtrless}_{b_i}^{b_j} \int_0^{T_a}[z(t) - s'_j(t)]^2\,dt, \qquad (5.17)$$

и нет надобности в вычитающих устройствах с опорными сигналами $G_{\text{ш}} \ln P(b_i)$.

P.5.1.5. Раскрыв в (5.9) квадратные скобки и выполнив элементарные преобразования, получим алгоритм (5.10), который реализуется с помощью схемы, называемой корреляционной, поскольку основные операции над входным сигналом сводятся к определению интеграла $\int_0^{T_a} z(t)s'_i(t)dt$ [функции корреляции между $z(t)$ и $s'_i(t)$]. Она содержит: m генераторов сигналов $s'_i(t)$, m перемножителей «×», m интеграторов «$\int$», m вычитающих устройств *ВУ* с опорными сигналами $O_i = \frac{1}{2}[E'_i - G_{\text{ш}} \ln P(b_i)]$, блок *ССВ*, *УП* и декодер (рис. 5.5). Если символы равновероятны, а сигналы $s'_i(t)$ имеют равные энергии, то отпадает необходимость в устройствах вычитания *ВУ*.

P.5.1.6. Если число символов равно двум, то из $(m-1)$ неравенств, определяющих алгоритм (5.10), остается лишь одно неравенство, которое после элементарных преобразований сводится к (5.11). Алгоритм (5.11) реализуется одноканальной схемой (рис. 5.6), содержащей: генератор опорного сигнала $s_{\text{оп}}(t) = s'_1(t) - s'_2(t)$; перемножитель «×», интегратор «$\int$», *ССВ* с пороговым уровнем $U_0 = \frac{1}{2}\left[E'_1 - E'_2 + G_{\text{ш}} \ln\frac{P(0)}{P(1)}\right]$.

---

[1] После вынесения решения интегрирующие устройства в оптимальной схеме должны быть приведены к нулевым начальным условиям.

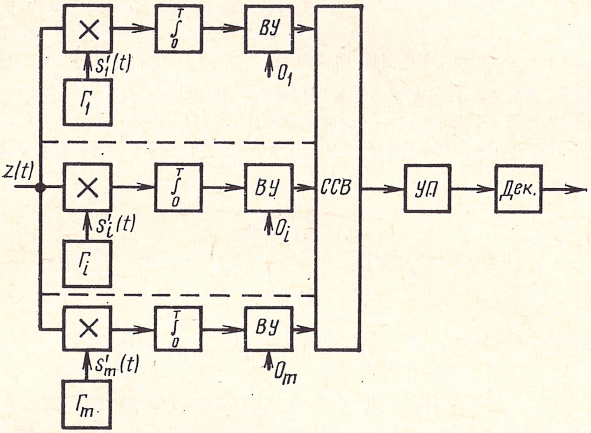


Рис. 5.5. Структурная схема корреляционного приемника при точно известном ансамбле сигналов

Если $P(0) = P(1)$, то $U_0 = (E'_1 - E'_2)/2$. Для двоичной системы с пассивной паузой $s'_2(t) = 0$, $E'_2 = 0$, $U_0 = \frac{1}{2}E'_1$ и алгоритм приема принимает вид $\int_0^{T_{\text{а}}} z(t)\, s'_1(t)\, dt \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} \frac{1}{2} E'_1$.

Для двоичной системы с активной паузой $U_0 = 0$. Для системы с противоположными сигналами алгоритм приема принимает вид

$$\int_0^{T_{\text{а}}} z(t)\, s'_1(t)\, dt \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} 0. \tag{5.18}$$

Р.5.1.7. Согласно (5.1) приемник зарегистрирует символ «1», апостериорная вероятность которого больше.

Р.5.1.8. Учитывая алгоритм (5.2), найдем границу между собственными областями Λ_1 и Λ_2 из условия

$P(b_1)\,w(z/b_1)=P(b_2)\,w(z/b_2)$. Подставив сюда выражения для функционалов $w(z/b_i)$, согласно (5.16) получим

$$P(b_1)\,K\exp\left\{-\frac{1}{G_{\text{ш}}}\int_0^T[z(t)-s_1'(t)]^2\,dt\right\}=$$

$$=P(b_2)\,K\exp\left\{-\frac{1}{G_{\text{ш}}}\int_0^T[z(t)-s_2'(t)]^2\,dt\right\}.$$

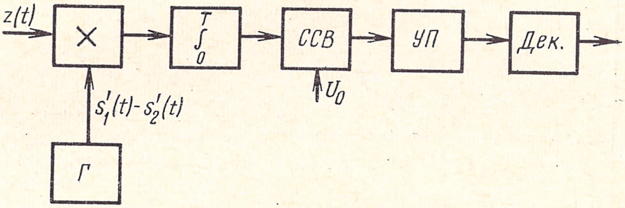


Рис. 5.6. Структурная схема корреляционного приемника для двоичных сигналов

Логарифмируя, приводим это равенство к виду

$$\ln P(b_1)-\frac{1}{G_{\text{ш}}}\int_0^T\left[z(t)-s_1'(t)\right]^2dt=\ln P(b_2)-$$

$$-\frac{1}{G_{\text{ш}}}\int_0^T\left[z(t)-s_2'(t)\right]^2dt$$

или

$$\int_0^T[z(t)-s_1'(t)]^2\,dt-\int_0^T[z(t)-s_2'(t)]^2\,dt=G_{\text{ш}}\ln\frac{P(b_1)}{P(b_2)}.$$

Величина $\int_0^T[z(t)-s'_1(t)]^2dt$ определяет в пространстве Гильберта квадрат расстояния между точками пространства, соответствующими принятой реализации $z(t)$ и сигналу $s'_i(t)$ (см. § 1.5). Следовательно, уравнение границы между собственными областями сигналов согласно критерию минимума средней вероятности ошибжи можно записать

$$\|\vec{z}-\vec{s}_1'\|^2-\|\vec{z}-\vec{s}_2'\|^2=G_{\text{ш}}\ln\frac{P(b_1)}{P(b_2)},$$

откуда следует, что граница между собственными областями сигналов это есть линия, являющаяся геометрическим местом точек, разность квадратов расстояний которых до точек сигналов имеет постоянную величину $G_{\text{ш}}\ln\dfrac{P(b_1)}{P(b^2)}$. Нетрудно убедиться в том, что это есть перпендикуляр, проходящий через отрезок, соединяющий точки s'_1 и s'_2 (рис. 5.7).

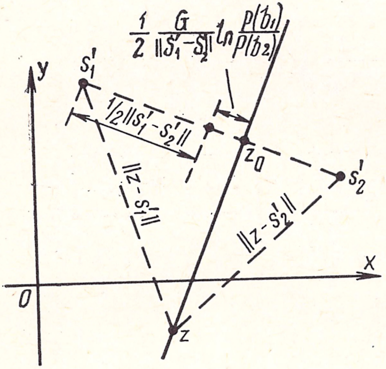


Рис. 5.7. К оптимальному разбиению пространства трех сигналов по критерию идеального наблюдателя

Найдем теперь расстояния от основания перпендикуляра (точка z_0) до точек s'_1 и s'_2. Очевидно, $\|\vec{z}_0-\vec{s}'_1\|^2-\|\vec{z}_0-\vec{s}'_2\|^2=G_{\text{ш}}\ln\dfrac{P(b_1)}{P(b_2)}$. С другой стороны, $\|z_0-\vec{s}'_1\|+\|\vec{z}_0-\vec{s}'_2\|=\|\vec{s}'_1-\vec{s}'_2\|$. Поделив первое равенство на второе, получим

$$\|\vec{z}_0-\vec{s}_1'\|-\|\vec{z}_0-\vec{s}_2'\|=\frac{G_{\text{ш}}\ln\dfrac{P(b_1)}{P(b_2)}}{\|\vec{s}_1'-\vec{s}_2'\|}.$$

Теперь нетрудно получить:

$$\|\vec{z}_0-\vec{s}_1'\|=\frac{\|\vec{s}_1'-\vec{s}_1'\|}{2}+\frac{1}{2}G_{\text{ш}}\frac{\ln\dfrac{P(b_1)}{P(b_2)}}{\|\vec{s}_1'-\vec{s}_2'\|};$$

$$\|\vec{z}_0 - \vec{s}'_2\| = \frac{\|\vec{s}'_1 - \vec{s}'_2\|}{2} - \frac{1}{2} G_{ш} \frac{\ln \frac{P(b_1)}{P(b_2)}}{\|\vec{s}'_1 - \vec{s}'_2\|} .$$

Очевидно, что при $P(b_1) = P(b_2)$ граница между собственными областями Λ_1 и Λ_2 будет представлять собой перпендикуляр, проходящий через середину отрезка, соединяющего сигнальные точки.

Р.5.1.9. В данном случае $D = L = 1$ (перекрываться могут только сигналы, соответствующие соседним кодовым посылкам). На интервале анализа $T_а = 2T$ имеется всего 2^{D+L+1} реализаций сигналов $s'_{r,i}(t)$, соответствующих передаче «1» или «0» до анализируемого, «1» или «0» после анализируемого. Реализация $s'_1(t) = s'_{111}(t) = g_2(t)h(t) + g_1(t)h(t) + g_2(t-T)h(t-T) + g_1(t-T)h(t-T)$ соответствует передаче «1» анализируемым символом, а также «1» до и после него;

$$s'_2(t) = s'_{011}(t) = -g_2(t)\,h(t) + g_1(t)\,h(t) + \\ + g_2(t-T)\,h(t-T) + g_1(t-T)\,h(t-T);$$

$$s'_3(t) = s'_{010}(t) = -g_2(t)\,h(t) + g_1(t)\,h(t) + \\ + g_2(t-T)\,h(t-T)\,h - g_1(t-T)\,h(t-T);$$

$$s'_4(t) = s'_{110}(t) = g_2(t)\,h(t) + g_1(t)\,h(t) + \\ + g_2(t-T)\,h(t-T) - g_1(t-T)\,h(t-T);$$

$$s'_5(t) = s'_{000}(t) = -s'_1(t); \quad s'_6(t) = s'_{001}(t) = -s'_4(t);$$

$$s'_7(t) = s'_{100}(t) = -s'_2(t); \quad s'_8(t) = s'_{101}(t) = -s'_3(t).$$

Согласно (5.3) с учетом (5.6) и (5.8) получаем при белом стационарном шуме алгоритм оптимального приема

$$\sum_{r=1}^{4} [\exp\left\{-\frac{1}{G_{ш}} \int_0^{2T} [z(t) - s'_r(t)]^2\, dt\right\} \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} \sum_{r=5}^{8} \exp\left\{-\frac{1}{G_{ш}} \int_0^{2T} [z(t) - s'_1(t)]^2\, dt\right\}, \qquad (5.19)$$

или

$$\sum_{r=1}^{4} \exp\left[\frac{2}{G_{ш}} \int_0^{2T} z(t)\, s'_r(t)\, dt - \frac{E'_r}{2}\right] \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} \sum_{r=5}^{8} \exp \times$$

$$\times\left[\frac{2}{G_{\text{ш}}}\int\limits_0^{2T} z(t)\,s'_r(t)\,dt-\frac{E'_r}{2}\right]; \qquad (5.20)$$

где $E'_r=\int\limits_0^{2T} s'^2_r(t)\,dt.$

На рис. 5.8 показана структурная схема приемника, реализующего алгоритм (5.19). Она содержит: блок измерения характеристик канала и формирования из при-

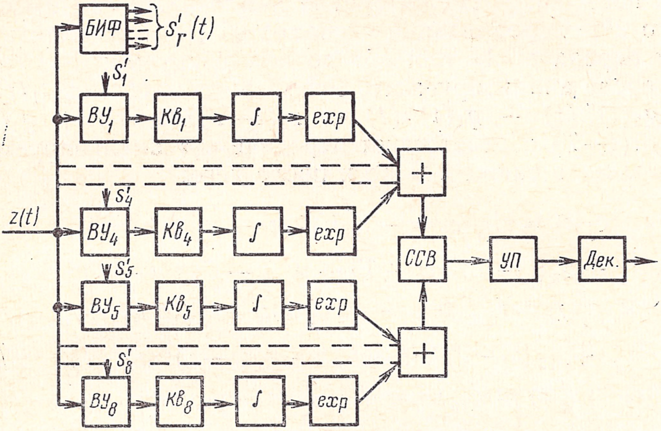


Рис. 5.8. Структурная схема оптимального приемника для канала с памятью

нимаемой смеси $z(t)$ необходимых для функционирования приемника сигналов синхронизации и восьми опорных сигналов $s'_r(t)$ *БИФ*; вычитающие устройства *ВУ*, квадратирующие устройства *Кв*, интеграторы, нелинейные устройства с экспоненциальной характеристикой «exp», два сумматора «+», *ССВ*, *УП* и декодер. Сравнивая (5.17) и (5.19), отмечаем, что, в отличие от канала без памяти, для реализации оптимального приема в канале с межсимвольной интерференцией требуется знание энергетического спектра шума в канале. При этом строго оптимальная схема в таком канале непременно содержит нелинейные блоки.

Р.5.1.10. Если имеется «идеальная» обратная связь по решению (по зарегистрированным символам можно точно восстановить сигнал «хвоста» $g_{\text{ост}}(t)$ от предшествующих символов), то можно подвергнуть анализу колебания $z_{\text{а}}(t)=z(t)-g_{\text{ост}}(t)$. При $D=1\,(T_{\text{а}}=2T)$ на интервале анализа могут быть образованы четыре реализации: реализация $s'_1(t)=s'_{11}(t)=g_1(t)h(t)+g_2(t-T)h(t-T)+g_1(t-T)h(t-T)$ соответствует передаче «1» анализируемым сигналом и «1» после него;

$$s'_2(t)=s'_{10}(t)=g_1(t)\,h(t)+g_2(t-T)\,h(t-T)-$$

$$-g_1(t-T)\,h(t-T);$$

$$s'_3(t)=s'_{01}(t)=-s'_2(t);\quad s'_4(t)=s'_{00}(t)=-s'_1(t).$$

Согласно (5.3) с учетом (5.7) и (5.8) получаем при белом стационарном шуме алгоритм оптимального приема

$$\sum_{r=1}^{2}\exp\left\{-\frac{1}{G_{\text{ш}}}\int\limits_0^{2T}[z_{\text{а}}(t)-s'_r(t)]^2\,dt\right\}\gtrless\sum_{r=3}^{4}\exp\left\{-\frac{1}{G_{\text{ш}}}\int\limits_0^{2T}[z_{\text{а}}(t)-\right.$$

$$\left.-s'_r(t)]^2\,dt\right\}. \qquad (5.21)$$

На рис. 5.9 показана структурная схема приемника, реализующего алгоритм (5.21). От схемы рис. 5.8 она отличается наличием обратной связи по решению *(ОСР)* от блока *УП* до блока *БИФ*. В последнем, помимо че-

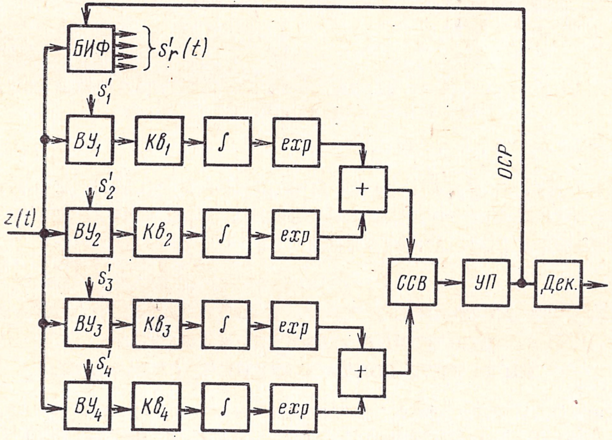


Рис. 5.9. Структурная схема приемника с обратной связью по решению

тырех опорных сигналов $s'_r(t)$, формируется также сигнал $g_{\text{ост}}(t)=\pm g_2(t)h(t)$. Знак этого сигнала при анализе очередного символа определяется тем, были ли при анализе предыдущего символа зафиксированы в *УП* «1» или «0».

Р.5.1.11. Если имеется идеальная обратная связь по решению и $D=0$, то на интервале анализа $T_{\text{а}}=T$ две реализации сигнала, соответствующие передаче «1» и «0», определяются так:

$$s'_1(t)=g_1(t); \quad s'_2(t)=-g_1(t).$$

В этом случае алгоритм оптимального приема

$$\int\limits_0^T [z(t)\pm g_2(t)]\,g_1(t)\,dt \underset{0}{\overset{1}{\gtrless}} 0 \tag{5.22}$$

реализуется линейной схемой рис. 5.10. Блок *БИФ*, охваченный обратной связью по решению, формирует по результатам измерения характеристик канала элементы $g_1(t)$ и $g_2(t)$. Знак при $g_2(t)$ в (5.22) определяется тем, были ли зарегистрированы при анализе предшествующего символа «1» или «0».

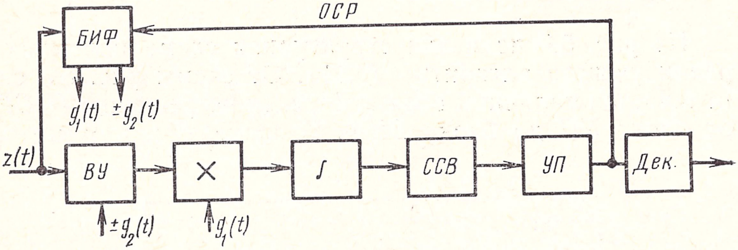


Рис. 5.10. Структурная схема оптимального приемника двоичных сигналов для канала с памятью

5.2. Реализация алгоритма оптимального приема при точно известном сигнале на основе согласованных фильтров

Линейным фильтром, согласованным с сигналом $s'_i(t)$, называют фильтр с постоянными параметрами и импульсной переходной характеристикой

$$g(t)=as'_i(t_0-t), \tag{5.23}$$

т. е. форма последней зеркальна[1] форме сигнала. Здесь a — произвольная постоянная.

Если длительность сигнала равна T, то из условия физической реализуемости следует, что

$$t_0 - T \geqslant 0. \tag{5.24}$$

На практике выбирают запаздывание $t_0 = T$.

Комплексный коэффициент передачи $\mathrm{K}(f)$ согласованного фильтра

$$\mathrm{K}(f) = \int_0^\infty g(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi f t}\, dt = a\, \mathrm{S}_i(-f)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f t_0}, \tag{5.25}$$

где $\mathrm{S}_i(-f)$ — комплексно-сопряженный спектр сигнала $s_i(t)$.

Согласованный фильтр в момент t_0 при флуктуационной помехе типа «белый шум» обеспечивает на своем выходе максимально возможное отношение пиковой мощности сигнала к средней мощности шума

$$r^2_{\text{макс}} = 2h_0^2 = 2\, \frac{P_{\text{с}} T}{G_{\text{ш}}} = 2F_{\text{к}} T \left(\frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}} \right)_{\text{вх}}. \tag{5.26}$$

Если $t_0 = T$, то в произвольный момент времени сигнальную компоненту на выходе согласованного фильтра можно найти как

$$y_{\text{с}}(t) = a \int_0^t s_i'(x)\, s_i'(x + T - t)\, dx = aB_{s_i'}(T - t), \tag{5.27}$$

где $B_{s_i'}(\tau)$ — корреляционная функция сигнала $s'_i(t)$.

В момент окончания сигнала на входе фильтра $t = T$ сигнал на выходе согласованного фильтра достигает максимального значения

$$y_{\text{с}}(T_{\text{с}}) = a \int_0^T z(t)\, s_i'(t)\, dt, \tag{5.28}$$

которое совпадает с точностью до множителя a с сигналом на выходе коррелятора в момент окончания сигнала (см. алгоритмы оптимального приема, полученные в задачах 5.1.5—5.1.6). Это позволяет в схеме оптимального приемника для точного известного ансамбля сигналов заменить коррелятор, состоящий из перемножителя и интегратора, согласованным фильтром.

Огибающая отклика согласованного фильтра, имеющего импульсную переходную характеристику $g(t)$, на сигнал $z(t)$ определяется соотношением

$$r(t) = \sqrt{\left[\int_0^t z(t)\, g(t - x)\, dx \right]^2 + \left[\int_0^t z(t)\, \hat{g}(t - x)\, dx \right]^2}. \tag{5.29}$$

---

[1] Относительно оси ординат, смещенной в точку t_0.

Задачи

5.2.1. Сигнал $s(t)$ задается функцией

$$s(t)=\begin{cases} kt & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 0 & \text{при } t<0; \quad t>T. \end{cases}$$

Построить график импульсной переходной характеристики фильтра, согласованного с сигналом $s(t)$ при условии $t_0=T$.

5.2.2. Двоичные равновероятные символы передаются по каналу без памяти сигналами $s_1(t)=A$ и $s_2(t)=0$ на тактовом интервале T. В канале действует аддитивный стационарный нормальный белый шум. Построить структурную схему приемника на основе согласованного фильтра.

5.2.3. Как может быть реализован согласованный фильтр для периодической последовательности прямоугольных импульсов?

5.2.4. Двоичные равновероятные символы передаются посредством ЧМ в канале без памяти. В месте приема на интервале анализа $T_а=T$ им соответствуют сигналы $s'_1(t)=U_m\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$ и $s'_2(t)=U_m\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$. В канале действует стационарный нормальный белый шум. Изобразить схему оптимального приемника на базе согласованных фильтров.

5.2.5. Показать, что согласованный фильтр для сигналов произвольной формы, в принципе, можно построить на основе неискажающей линии задержки на время T (T — длительность сигнала).

5.2.6. Составить схему согласованного фильтра на базе длинной линии с отводами для однополярного и двуполярного двоичных сигналов, соответствующих последовательности символов 1 1 0 0 1 0 1 0 1. Нарисовать форму сигнала на выходе согласованного фильтра.

5.2.7. Сравнить форму огибающих сигналов на выходе коррелятора и согласованного фильтра в случае подачи на их вход одиночного прямоугольного радиоимпульса и одиночного прямоугольного видеоимпульса.

5.2.8. Показать, что результат (5.26) справедлив для любой линейной системы, для которой выходной процесс определяется соотношением $y(t)=\int\limits_0^t s(\tau)z(\tau)\,d\tau$.

5.2.9. Какой выигрыш в отношении *сигнал/шум* может дать фильтр, согласованный с сигналом, имеющим длительность $T=20$ мс и полосу частот $F=10$ кГц?

5.2.10. Показать, что величина огибающей отклика согласованного фильтра на сигнал $z(t)=s'(t)=\gamma[\cos\theta_к s(t)-\sin\theta_к \hat{s}(t)]$ (γ, $\theta_к$ — коэффициент передачи и фазовый сдвиг канала) инвариантна к изменению фазы $\theta_к$.

Решения и ответы

Р.5.2.1. Согласно (5.23) импульсная переходная характеристика согласованного фильтра является зеркальным отражением сигнала относительно точки t_0.

Следовательно, в данном случае

$$g(t)=k(T-t), \quad 0<t<T.$$

График этой функции показан на рис. 5.11.

Р.5.2.2. Согласно (5.28) в момент окончания входного сигнала на выходе согласованного фильтра получается напряжение, пропорциональное сигналу на выходе интегратора корреляционного приемника. Следовательно, оптимальное приемное устройство при точно известном сигнале можно реализовать на базе согласованных фильтров.

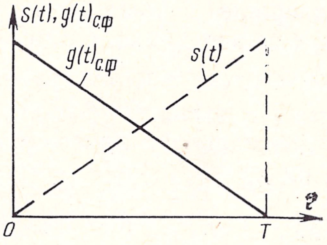


Рис. 5.11. Импульсная переходная характеристика фильтра, согласованного с линейно нарастающим сигналом

Рассмотрим пример построения согласованного фильтра для прямоугольного видеоимпульса, заданного в виде

$$s(t)=A \quad \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant T; \quad s(t)=0 \quad \text{при} \quad t<0, \quad t>T.$$

Спектр по Фурье для такого импульса определяется соотношением $\mathbf{S}(f)=\frac{aA}{i2\pi f}(1-\mathrm{e}^{i2\pi fT})$. На основании (5.25) для коэффициента передачи согласованного фильтра получим

$$\mathbf{K}(f) = \frac{aA}{-\mathrm{i}\,2\pi f}\left(1 - e^{\mathrm{i}\,2\pi f T}\right) e^{-\mathrm{i}\,2\pi f T} =$$

$$= \frac{aA}{\mathrm{i}\,2\pi f}\left(1 - e^{-\mathrm{i}\,2\pi f T}\right).$$

Известно, что умножение на $\frac{1}{\mathrm{i}2\pi f}$ в частотной области соответствует интегрированию в пределах от $-\infty$ до t во временно́й области, а умножение на $e^{-\mathrm{i}2\pi f T}$ соответствует задержке сигнала на время T. Следовательно, фильтр, согласованный с одиночным прямоугольным импульсом, состоит из интегратора «$\int$», линии задержки на время T и вычитающего устройства *ВУ*. Структурная схема оптимального приемника с таким фильтром показана на рис. 5.12. *ЛЗ* — линия задержки; *ЯП* — ячейка памяти.

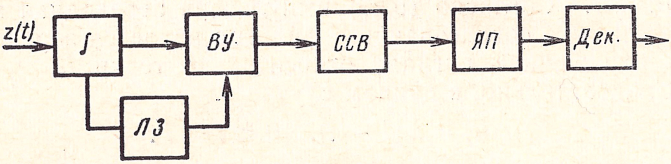


Рис. 5.12. Структурная схема оптимального приемника с согласованным фильтром для одиночного прямоугольного импульса

Р.5.2.3. Если сигнал представляет собой последовательность n одинаковых импульсов с интервалом повторения $T_{\text{п}}$

$$s(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A(t - kT_{\text{п}}),$$

то его спектр по Фурье

$$\mathbf{S}(f) = \mathbf{S}_1(f)\left[1 + e^{-\mathrm{i}\,2\pi f T_{\text{п}}} + e^{-\mathrm{i}\,4\pi f T_{\text{п}}} + \right.$$

$$\left. + \ldots + e^{-\mathrm{i}\,(n-1)\,2\pi f T_{\text{п}}}\right].$$

Здесь $\mathbf{S}_1(f)$ — спектр импульса, начинающегося в момент $t=0$; $\mathbf{S}_1(f)e^{-\mathrm{i}2\pi f T_{\text{п}}}$ — спектр второго импульса, начинающегося в момент $t=T_{\text{п}}$, и т. д. Так как длительность сигнала $T_{\text{с}} = T + (n-1)T_{\text{п}}$, то согласно (5.25) коэффициент передачи согласованного фильтра

$$\mathbf{K}(f) = a\mathbf{S}(-f)\,e^{-i\,2\pi f\,[T+(n-1)T_п]} =$$

$$= a\mathbf{K}_1(f)\left[1 + e^{-i\,2\pi f\,T_п} + e^{-i\,4\pi f\,T_п} + \ldots + e^{-i\,(n-1)\,2\,\pi f\,T_п}\right].$$

Здесь $\mathbf{K}_1(f)$ — коэффициент передачи фильтра, согласованного с одиночным импульсом. Выражение в квадратных скобках является геометрической прогрессией и может быть представлено при $n \gg 1$.

$$\mathbf{K}_2(f) = \frac{1 - e^{-i2\pi f\,n\,T_п}}{1 - e^{-i2\pi f\,T_п}} = \frac{\sin n\,\pi f\,T_п}{\sin \pi f\,T_п}\,e^{-i\pi(n-1)fT_п}.$$

Функция $\mathbf{K}_2(f)$ имеет максимумы на частотах, кратных периоду повторения импульсов $T_п$, и представляет собой коэффициент передачи гребенчатого фильтра. Таким образом, согласованный фильтр для периодической последовательности импульсов можно реализовать в виде каскадного соединения согласованного фильтра для одиночного импульса и гребенчатого фильтра с коэффициентом передачи $\mathbf{K}_2(t)$.

Р.5.2.4. В рассматриваемом случае корреляционные устройства в оптимальном приемнике должны быть заменены фильтрами, согласованными с радиоимпульсами, имеющими частоты заполнения ω_1 и ω_2. В качестве примера найдем импульсную переходную характеристику фильтра, согласованного с сигналом

$$s_1'(t) = U_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

и рассмотрим его возможную реализацию. Выбирая $t_0 = T$, согласно (5.23) можно записать

$$g(t) = aU_m \cos(\omega_1 t_0 + \varphi_1 - \omega_1 t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Такая характеристика может быть реализована с помощью высокодобротного ($Q \gg 1$) колебательного контура при условии, что для частоты ω_1 он создает фазовый сдвиг $-\omega_1 t_0 - \varphi_1$. Структурная схема оптимального приемника показана на рис. 5.13. Ключ K в момент времени $t = t_0 = T$ на очень короткое время закорачивает емкость и разрывает цепь с индуктивностью для освобождения контура от накопленной энергии и его подготовки к приему следующих элементов сигнала [1].

---

[1] Такой вариант согласованного фильтра называется коммутируемым. В принципе, можно построить согласованный фильтр и без коммутации параметров. В этом случае фильтр называют пассивным [12].

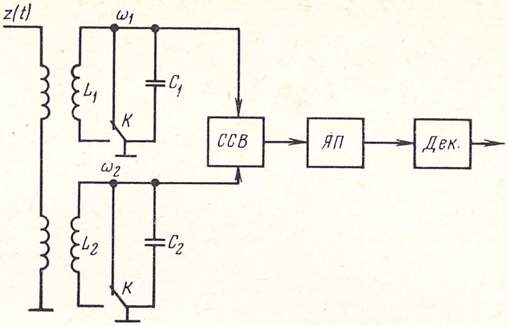

z(t)
ω1
L1
C1
K
ССВ
ЯП
Дек.
ω2
L2
C2
K

Рис. 5.13. Реализация оптимального по критерию максимального правдоподобия приемника сигналов ЧМ на базе согласованных фильтров

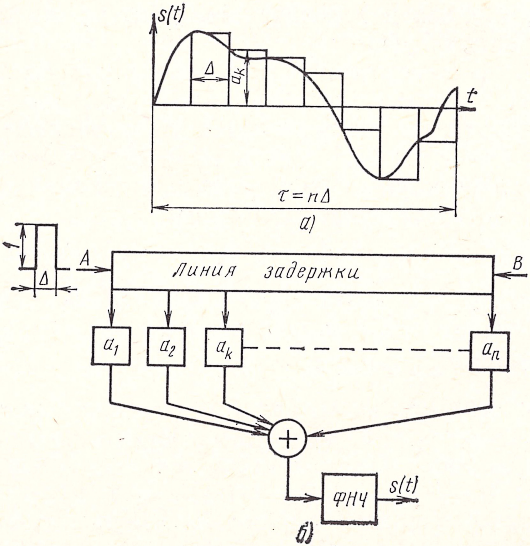

s(t)
Δ
a_k
t
τ = nΔ
а)
Δ
A
Линия задержки
B
a1
a2
ak
an
+
ФНЧ
s(t)
б)

Рис. 5.14. Реализация фильтра, согласованного с произвольным непрерывным сигналом, на основе линии задержки с отводами и блоками взвешивания:
а — сигнал; *б* — согласованный фильтр

Р.5.2.5. Любую финитную функцию $s(t)$ можно аппроксимировать последовательностью из $n=T/\Delta$ прямоугольных импульсов малой длительности Δ и высоты a_k ($k=1, 2, ..., n$) (рис. 5.14*а*). Величина $\Delta \leqslant \frac{1}{2F_c}$ и определяется допустимой точностью аппроксимации.

Если на вход (точка A) длинной линии с отводами через интервалы Δ подать в момент $t=0$ импульс с длительностью Δ единичной высоты и просуммировать с весами a_k значения сигналов в отводах линии (рис. 5.14*б*), то на выходе сумматора получим сигнал $s(t)$. Фильтр нижних частот подавляет спектральные компоненты, лежащие вне полосы сигнала F_c.

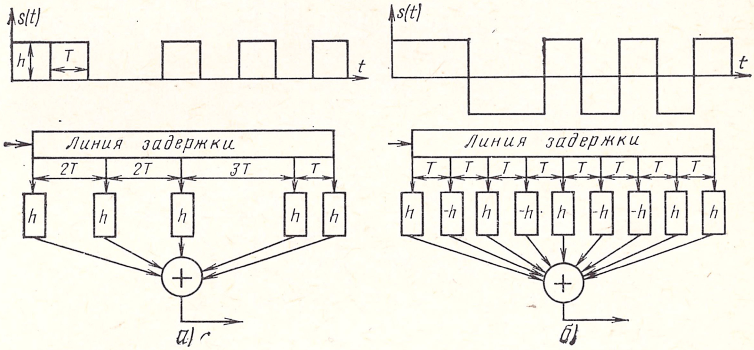


Рис. 5.15. Реализация согласованных фильтров на основе линии задержки:
а — для однополярного двоичного сигнала; *б* — для двухполярного двоичного сигнала

Если единичный импульс подвести к выходу линии (точка B), отклик будет зеркальным отражением сигнала $s(t)$, и схема рис. 5.14*б* будет выполнять роль согласованного фильтра.

Р.5.2.6. Схема согласованного фильтра для однополярного двоичного сигнала показана на рис. 5.15*а*, для двуполярного — на рис. 5.15*б*.

Р.5.2.7. Форма огибающих колебаний на выходе согласованного фильтра и коррелятора для одиночного видеоимпульса и радиоимпульса показана на рис. 5.16. Полезно отметить, что в момент окончания сигнала отклики имеют одинаковое значение.

Р.5.2.8. Пусть на вход линейной системы, осуществляющей обработку сигнала в соответствии с алгоритмом $y(t)=\int_0^T z(\tau)\,s(\tau)\,d\tau$, поступает смесь сигнала и нормального стационарного шума $z(t)=s(t)+u(t)$, причем

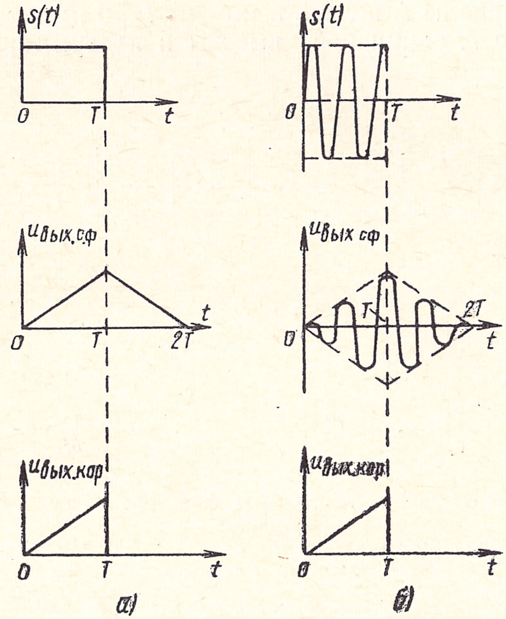


Рис. 5.16. Диаграммы напряжений на выходе коррелятора и согласованного фильтра при подаче на вход прямоугольных видеоимпульса (*а*) и радиоимпульса (*б*)

$s(t)\neq 0$ при $0\leqslant t\leqslant T$. В момент окончания сигнала $t=T$ сигнальная компонента на выходе заданной линейной системы $y_{\text{с}}(t)=\int_0^T s^2(\tau)\,d\tau=P_{\text{с}}T=E$ (E — энергия сигнала на входе). Шумовая компонента на выходе заданной линейной системы $y_{\text{п}}(t)=\int_0^T u(\tau)\,s(\tau)\,d\tau$ представляет собой нормальный процесс с дисперсией $\overline{y^2_{\text{п}}(t)}=$ $=G_{\text{ш}}E/2$ ($G_{\text{ш}}$ — спектральная плотность мощности шума на входе). Отношение *сигнал/шум* на выходе заданной линейной системы в момент $t=T$

$$r^2 = \frac{y^2_{\text{с}}(T)}{\overline{y^2_{\text{п}}(t)}} = \frac{2E^2}{G_{\text{ш}}E} = \frac{2E}{G_{\text{ш}}} = 2h_0^2 = 2\frac{P_{\text{с}}T}{G_{\text{ш}}} =$$

$$= 2F_{\text{к}}T\left(\frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}}\right)_{\text{вх}}.$$

Полученный результат справедлив для согласованного фильтра и коррелятора.

Р.5.2.9. Согласно (5.26) выигрыш в отношении *сигнал/шум*, даваемый согласованным фильтром,

$$\frac{r^2}{\left(\frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}}\right)_{\text{вх}}} = 2F_{\text{к}}T = 2\cdot 20\cdot 10^{-3}\cdot 10^4 = 400.$$

Р.5.2.10. Учитывая (5.23) и полагая $t_0=T$, выражение (5.29) можно записать так:

$$r(t)_{\text{с.ф}} = a\sqrt{\left[\int_0^t z(x)\,s'(T-t+x)\,dx\right]^2 + \rightarrow}$$

$$\overline{\rightarrow + \left[\int_0^t z(x)\,\hat{s}'(T-t+x)\,dx\right]^2}.$$

В момент $t=T$

$$r(t)_{\text{с.ф}} = V = a\sqrt{\left[\int_0^T z(x)\,s'(x)\,dx\right]^2 + \left[\int_0^T z(x)\,\hat{s}'(x)\,dx\right]^2}.$$

Поскольку $s'(t) = \gamma[\cos\theta_{\text{к}} s(t) - \sin\theta_{\text{к}}\hat{s}(t)]$, то $\hat{s}'(t) = \gamma[\cos\theta_{\text{к}}\hat{s}(t) + \sin\theta_{\text{к}} s(t)]$. Подставляя значения $\hat{s}'(t)$ и $s'(t)$ в выражение для V, находим, что

$$V = a\gamma\sqrt{\left[\int_0^T z(x)\,s(x)\,dx\right]^2 + \left[\int_0^T z(x)\,\hat{s}(x)\,dx\right]^2}$$

от $\theta_{\text{к}}$ не зависит.

5.3. Помехоустойчивость (вероятность ошибки) оптимальных схем приема при точно известном сигнале

Будем определять помехоустойчивость при равновероятных символах. При заданной системе сигналов, канале и способе анализа принимаемой смеси (по отдельным отсчетам или на всем временно́м интервале) оптимальный (по критерию максимального правдоподобия) приемник обеспечивает минимальную вероятность ошибки.

Вероятность ошибочного перехода $P(b'_j/b_i)$ (вероятность регистрации символа b'_j при условии передачи символа b_i) определяется вероятностью невыполнения системы неравенств, задаваемых алгоритмом приема.

Средняя вероятность ошибки для двухпозиционной системы

$$p_{\text{ош}} = \sum_{i=1}^{2} P\left(b'_j/b_i\right), \quad j \neq i. \tag{5.30}$$

Из двоичных систем для неискажающего канала с белым гауссовым шумом особый интерес представляет система с противоположными сигналами (например, ФМ с манипуляцией фазы на π). Однако ввиду реализационных трудностей (случайного перескока фазы опорного колебания и появления «обратной работы») на практике широко применяется двоичная система с относительной манипуляцией фазы (ОФМ), в которой информация закладывается в разность фаз соседних посылок [19]. Платой за устранение «обратной работы» является (в условиях надежной связи) удвоение вероятности ошибки, обусловленной шумом в канале:

$$p_{\text{ошОФМ}} \approx 2p_{\text{ошФМ}}. \tag{5.31}$$

Вероятность ошибки для многопозиционных систем в общем случае определяется сложнее, чем для двоичных. В области надежной связи вероятность ошибочного приема многопозиционного символа $p_{\text{ош},m}$ при использовании системы сигналов с активной паузой и симметричном канале

$$p_{\text{ош},m} \approx (m-1)\, p_{\text{ош}}, \tag{5.32}$$

где $p_{\text{ош}}$ — вероятность ошибочного приема двоичного символа в том же канале и способе анализа смеси $z(t)$.

Задачи

5.3.1. Определить среднюю вероятность ошибки для сигналов, канала и приемника, рассмотренных в задаче 5.1.2 при $P(b_1) = P(b_2) = 1/2$.

5.3.2. Определить среднюю вероятность ошибки для сигналов, канала и приемника, рассмотренных в задаче 5.1.3 при равновероятных символах.

5.3.3. Определить минимальную вероятность ошибки приемника Котельникова при использовании m-позиционной системы ортогональных на интервале T сигналов с активной паузой в канале без памяти и с аддитивным стационарным гауссовым белым шумом. Упростить результат для области больших отношений *сигнал/шум*.

5.3.4. Определить среднюю вероятность ошибки при оптимальном приеме двоичных сигналов на фоне стационарного нормального белого шума в канале без памяти и анализе на интервале $(0, T)$.

Какой формулой определяется минимальная вероятность ошибки для системы АМ (с пассивной паузой), ЧМ (с ортогональными сигналами) и ФМ (с противоположными сигналами)?

5.3.5. Показать, что при точно известном ансамбле двоичных сигналов с заданной энергией и белым шумом в канале минимально возможную вероятность ошибки обеспечивает система с противоположными сигналами.

5.3.6. Показать, что при оптимальном приеме сигналов ОФМ по методу сравнения полярностей вероятность ошибки можно оценить по ф-ле (5.31). Вычислить вероятность ошибки, если сигнал на передаче имеет среднюю мощность $P_c = 0{,}5$ Вт, коэффициент передачи канала $\gamma = 10^{-2}$, длительность элементарной посылки $T = 10$ мс, спектральная плотность мощности шума в канале $G_ш = 10^{-7}$ Вт/Гц.

5.3.7. Найти энергетический выигрыш по средней и пиковой мощностям передатчика при переходе от системы АМ к системам ЧМ и ФМ и энергетический выигрыш перехода от системы ЧМ к ФМ при оптимальном приеме точно известного ансамбля сигналов, полагая вероятность ошибки неизменной.

5.3.8. В системе двоичной фазовой манипуляции (ФМ) использованы сигналы

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_0 t + (i-1)\pi), \quad i = 1,\ 2,\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где E — энергия сигналов $s_i(t)$; T — длительность элементарной посылки. Опорное колебание $s_{оп}(t)$, необходимое для работы корреляционного приемника, имеет вид

$$s_{оп}(t) = k\sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где k — коэффициент пропорциональности; φ — фазовый сдвиг, отличный от нуля. Определить вероятность ошибки, полагая, что в канале действует стационарный нормальный белый шум со спектральной плотностью мощности $G_ш$, и оценить степень ухудшения помехоустойчивости системы по сравнению с идеальным случаем $(\varphi = 0)$.

Какую можно допустить фазовую расстройку φ, при которой энергетический проигрыш η не превышает величину 1,1 (потеря мощности передатчика составляет 10%)?

5.3.9. В системе двоичной фазовой манипуляции, использующей сигналы $s_i(t)$ из предыдущей задачи, опорное колебание формируется с помощью высокодобротного избирательного контура, на вход которого воздействует аддитивная смесь гармонического колебания $s(t)=ks_1(t)$ и нормального стационарного белого шума $U(t)$. Опорное колебание при этом имеет вид

$$s_{\text{оп}}(t)=A_{\text{оп}}(t)\cos(\omega_0 t+\varphi),$$

причем плотность вероятности фазы (см. Р.1.2.12, [15]) описывается соотношением

$$w_1(\varphi)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}a^2}+\frac{a\cos\varphi}{\sqrt{2\pi}}F(a\cos\varphi)\,e^{-\frac{1}{2}a^2\sin^2\varphi}$$

($a=\alpha_{\text{р}}/\sigma$ — отношение регулярной и флуктуирующей компонент входного колебания). Полагая, что амплитуда напряжения на выходе колебательного контура постоянна и равна $A_{\text{оп}}(t)=k\sqrt{\frac{2E}{T}}$, определить вероятность ошибки.

5.3.10. В двоичной системе ФМ для передачи информации использованы сигналы $s_1(t)=\sqrt{\frac{2E}{T}}\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$ и $s_2(t)=-\sqrt{\frac{2E}{T}}\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$. Опорное колебание в корреляционном приемнике совпадает по форме с сигналом $s_1(t)$: $s_{\text{оп}}(t)=\sqrt{\frac{2E}{T}}\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$.

Полагая, что в канале действует нормальный стационарный белый шум со спектральной плотностью мощности $G_{\text{ш}}$, определить вероятность ошибки и энергетический проигрыш, если из-за неточности работы системы синхронизации интервал интегрирования сдвинут относительно начала посылки на величину τ ($|\tau|\leqslant T/2$).

Найти допустимую величину τ, при которой энергетический проигрыш не превышает величину $\eta=1{,}1$.

5.3.11. Полагая, что в системе ФМ использованы сигналы $s'_1(t)$ и $s'_2(t)$ из задачи 5.3.10, определить вероятность ошибки при совместном учете как тактовой рассинхронизации на величину τ, так и несинфазности опорного и принимаемого колебаний на величину φ.

Определить величину энергетического проигрыша. Полагая, что допустимая величина энергетического проигрыша равна 1,1, найти допустимые значения величин τ и φ.

5.3.12. Полагая, что опорные колебания формируются с ошибкой по фазе на величину φ, а тактовая синхронизация дает ошибку τ, найти вероятность ошибки при оптимальном когерентном приеме сигналов двоичной АМ и ЧМ и величину энергетического проигрыша.

5.3.13. Вывести выражение для вероятности ошибки и энергетического проигрыша при оптимальном когерентном приеме сигналов двоичной ФМ в канале с точно известными параметрами и нормальным стационарным белым шумом со спектральной плотностью мощности $G_ш$, полагая, что для передачи информации использованы сигналы

$$s_1(t)=\sqrt{\frac{2E}{T}}\cos(\omega_0 t+\varphi) \text{ и } s_2(t)=-\sqrt{\frac{2E}{T}}\cos(\omega_0 t+\varphi),$$

а опорное колебание имеет расстройку по частоте

$$s_{оп}(t)=\sqrt{\frac{2E}{T}}\cos[(\omega_0+\Delta\omega)t+\varphi].$$

Какова допустимая расстройка $\Delta\omega$, при которой энергетический проигрыш не превышает 1,1?

5.3.14. По условию предыдущей задачи найти вероятность ошибки и энергетический проигрыш при оптимальном когерентном приеме сигналов двоичной АМ и ЧМ в условиях частотной расстройки между опорными и ожидаемыми колебаниями.

5.3.15. В канале с точно известными параметрами и нормальным стационарным белым шумом со спектральной плотностью мощности $G_ш$ осуществляется прием двоичных сигналов ФМ:

а) корреляционным приемником; б) интегральным приемником.

Сравнить вероятности ошибок при данных способах приема и определить энергетический выигрыш при переходе от интегрального к корреляционному приему.

5.3.16. В системе двоичной фазовой манипуляции для передачи информации использованы сигналы $s_1(t)=\sqrt{\frac{2E}{T}}\cos\omega_0 t$ и $s_2(t)=-\sqrt{\frac{2E}{T}}\cos\omega_0 t$ длительностью T. Вследствие линейных искажений в канале на вход приемника поступают сигналы:

$$s_1'(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}}\, e^{-\beta^2\left(t-\frac{T}{2}\right)^2}\cos\omega_0 t; \quad s_2'(t) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2E}{T}}\, e^{-\beta^2\left(t-\frac{T}{2}\right)^2}\cos\omega_0 t.$$

Полагая, что в канале действует нормальный стационарный белый шум со спектральной плотностью мощности $G_ш$, определить вероятность ошибки при корреляционном приеме, если опорное колебание имеет прямоугольную огибающую: $s_{оп}(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}}\cos\omega_0 t\,(0 \leqslant t \leqslant T)$.

Найти энергетический проигрыш по сравнению со случаем отсутствия линейных искажений.

5.3.17. Определить среднюю вероятность ошибки для сигналов, канала и приемника, рассмотренных в задаче. 5.1.11. Найти энергетический проигрыш анализируемого приемника по отношению к приемнику, реализующему предельно возможную помехоустойчивость в заданном канале.

5.3.18. Равновероятные символы «1» и «0» передаются посредством сигналов: $s_1(t) = U_m \sin\omega_0 t$ и $s_2(t) = -U_m \sin\omega_0 t$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\omega_0 \gg 2\pi/T$. Канал не искажает сигналов, и в нем имеется аддитивный стационарный нормальный шум с энергетическим спектром $G_0(f) = \frac{2\alpha}{(\omega-\omega_0)^2+\alpha^2}$.. Найти вероятность ошибки при оптимальном приеме по критерию максимального правдоподобия, пользуясь методом приведения небелого шума к белому, полагая, что длительность переходного процесса на выходе «обеляющего» фильтра $\tau_{пер} \ll T$. Найти энергетический проигрыш, связанный с наличием небелого шума, по сравнению со случаем приема в присутствии белого шума, имеющего в полосе f_0+F, f_0-F такую же среднюю мощность.

Решения и ответы

Р.5.3.1. Согласно Р.5.1.2 правило решения приемника при $P(b_1) = P(b_2) = \frac{1}{2}$ можно записать в виде

$z \overset{b_1}{\underset{b_2}{\gtrless}} 0$. Отсчеты смеси детерминированного сигнала и шума z имеют нормальное распределение, дисперсию σ^2 и среднее значение a (при передаче символа b_1) или $-a$ (при передаче символа b_2). Условные плотности вероятности отсчетов при передаче символов b_1 и b_2 равны соответственно:

$$w_1(z/b_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}; \quad w_1(z/b_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(z+a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Найдем вероятности ошибочных переходов $P(b'_1/b_2)$ и $P(b'_2/b_1)$:

$$P(b'_2/b_1) = P(z < 0/b_1) = \int\limits_{-\infty}^{0} w_1(z/b_1)\,dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{0} \exp\left[-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right] dz = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)\right];$$

$$P(b'_1/b_2) = P(z > 0/b_2) = \int\limits_{0}^{\infty} w_1(z/b_2)\,dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{0}^{\infty} \exp\left[-\frac{(z+a)^2}{2\sigma^2}\right] dz = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)\right].$$

Среднюю вероятность ошибки находим согласно (5.30):

$$p_{\text{ош}} = \frac{1}{2}\left[P(b'_1/b_2) + P(b'_2/b_1)\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)\right].$$

Р.5.3.2. Согласно Р.5.1.3 правило решения приемника при равновероятных символах можно записать $z_1 + z_2 + z_3 \overset{b_1}{\underset{b_2}{\gtrless}} 0$. Отсчеты z_i имеют нормальное распределение, дисперсию σ^2 и среднее значение a (при передаче символа b_1) или $-a$ (при передаче символа b_2). Сумма независимых нормально распределенных величин имеет также нормальное распределение, дисперсию, равную сумме дисперсий исходных величин, и среднее значение, равное сумме их средних значений [15]. Поэтому для условных плотностей вероятности суммы отсчетов можно записать:

$$w_1(z_1+z_2+z_3/b_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, 3\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(z-3a)^2}{2\cdot 3\sigma^2}\right];$$

$$w_1(z_1+z_2+z_3/b_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, 3\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(z+3a)^2}{2\cdot 3\sigma^2}\right].$$

Теперь аналогично Р.5.3.1 получаем

$$P(b_2'/b_1) = \int_{-\infty}^{0} w_1(z_1+z_2+z_3)/b_1)\,dz = \frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{\sqrt{3}\,a}{\sigma}\right)\right];$$

$$P(b_1'/b_2) = \int_{0}^{\infty} w_1(z_1+z_2+z_3/b_2)\,dz = \frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{\sqrt{3}\,a}{\sigma}\right)\right];$$

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{\sqrt{3}\,a}{\sigma}\right)\right];$$

Р.5.3.3. Условия правильного приема символа b_1 в многопозиционной системе, использующей ортогональные сигналы с активной паузой, согласно Р.5.1.5 такие:

$$\int_0^T z(t)\,s_1(t)\,dt > \int_0^T z(t)\,s_i(t)\,dt;\quad i=2,3,4,\dots,\ m.$$

Поскольку $z(t)=s'_1(t)+u(t)$, $\int\limits_0^T s'_1(t)s'_i(t)dt=0$ и $\int\limits_0^T s'^2_i(t)dt=E'$, то эти условия можно записать так: $\int\limits_0^T u(t)[s_1(t)-s_i(t)]dt>-E'$ или $\theta_i<\theta_1+E'$, где $\theta_i=\int\limits_0^T s_i(t)u(t)dt$.

Случайная величина $\theta_i=\int\limits_0^T s'_i(t)u(t)dt$ распределена по нормальному закону, имеет нулевое среднее значение и дисперсию $\overline{\theta^2_i}=G_{\text{ш}}E'/2$. Вероятность выполнения неравенства $\theta_i<\theta_1+E'$ будет равна

$$P(\Theta_i>\Theta_1+E') = \int_{-\infty}^{\Theta_1+E'} \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\overline{\Theta_i^2}}}\exp\left(-\frac{\Theta_i^2}{2\,\overline{\Theta_i^2}}\right)d\Theta_i =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\Theta_1+E'} \frac{1}{\sqrt{\pi G_{\text{ш}} E'}} \exp\left(-\frac{\Theta_i^2}{G_{\text{ш}} E'}\right) d\Theta_i = \frac{1}{2}\left[1+\Phi\left(t+\sqrt{2h_0^2}\right)\right],$$

где $t = \dfrac{\Theta_1}{\sqrt{\dfrac{G_{\text{ш}} E'}{2}}}$; $h_0^2 = \dfrac{E'}{G_{\text{ш}}}$.

Вероятность того, что во всех $m - 1$ ветвях величины θ^i не превысят величину θ_1, равна $\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}[1+\Phi(t+ +\sqrt{2h^2_0})]^{m-1}$. Усредняя это выражение по всем возможным значениям θ_1, получаем вероятность правильного приема

$$p_{\text{прав}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \left\{\frac{1}{2}\left[1+\Phi\left(t+\sqrt{2h_0^2}\right)\right]\right\}^{m-1} dt.$$

Вероятность ошибки в m-позиционной системе

$$p_{\text{ош},m} = 1 - p_{\text{прав}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(t+\sqrt{2h_0^2}\right)\right]^{m-1} dt.$$

При больших значениях h^2_0 это выражение можно привести к виду

$$p_{\text{ош},\,m} \approx (m-1)\frac{1}{2}\left[1-\Phi\sqrt{h_0^2}\right].$$

P.5.3.4. Согласно **Р.5.1.6 можно** записать алгоритм работы оптимального приемника двоичных сигналов

$$\int\limits_0^T z(t)\,[\,s_1'(t) - s_2'(t)]\,dt \overset{b_1}{\underset{b_2}{\gtrless}} \frac{1}{2}\left[E_1 - E_2 + G_{\text{ш}} \ln\frac{P(b_2)}{P(b_1)}\right].$$

(Здесь $E'_i = \int\limits_0^T s'^2_i(t)\,dt$ — энергия сигнала $s'_i(t)$).

Если действительно был передан символ b_1, то $z(t)=s'_1(t)+u(t)$, и событию, заключающемуся в правильной регистрации переданного символа, будет соответствовать неравенство

$$\int\limits_0^T u(t)\,[\,s_1'(t) - s_2'(t))\,dt > -\frac{1}{2}\int\limits_0^T [\,s_1'(t) - s_2'(t)]^2\,dt + \frac{1}{2} G_{\text{ш}} \ln\frac{P(b_2)}{P(b_1)}.$$

Вероятность ошибки определится вероятностью выполнения обратного неравенства, т. е.

$$\int\limits_0^T u(t)\,[s_1'(t)-s_2'(t)]\,dt < -\frac{1}{2}\int\limits_9^T [s_1'(t)-s_2'(t)]^2\,dt + \\ + \frac{1}{2}G_ш \ln\frac{P(b_2)}{P(b_1)}.$$

Обозначим $\int\limits_0^T u(t)\,[s_1'(t)-s_2'(t)\,]\,dt=\theta$; $\int\limits_0^T [s_1'(t)-s_2'(t)]^2 dt = E_э$ и запишем полученное неравенство в виде

$$\Theta < -\frac{1}{2}\left[E_э + G_ш \ln\frac{P(b_2)}{P(b_1)}\right].$$

Так как шум в канале нормальный и имеет нулевое среднее значение, то θ является нормальной случайной величиной с параметрами $\Theta=0$ и $\sigma_\theta^2=\frac{G_ш}{2}E_э$. Теперь можно записать выражение для вероятности $P\,(b'_2/b_1)$

$$P(b_2'/b_1) = \int\limits_{-\infty}^{-\frac{1}{2}\left[E_э+G_ш\ln\frac{P(b_1)}{P(b_2)}\right]} w(\Theta)\,d\Theta = \\ = \frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{E_э+G_ш\ln\frac{P(b_1)}{P(b_2)}}{\sqrt{2G_ш E_э}}\right)\right].$$

Аналогично находим

$$P(b_1'/b_2) = \frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{E_э-G_ш\ln\frac{P(b_1)}{P(b_2)}}{\sqrt{2G_ш E_э}}\right)\right].$$

Средняя вероятность ошибки

$$p_{ош} = P(b_1)\,\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{E_э+G_ш\ln\frac{P(b_1)}{P(b_2)}}{\sqrt{2G_ш E_э}}\right)\right] + \\ + P(b_2)\,\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{E_э-G_ш\ln\frac{P(b_1)}{P(b_2)}}{\sqrt{2G_ш E_э}}\right)\right].$$

Для системы с пассивной паузой (АМ) $s_1(t)\neq 0$ и $s_2(t)=0$; $E_э=\int\limits_0^T s'^2_1(t)\,bt=E'_1$ и

$$p_{ош}=P(b_1)\,\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{E_1'+G_ш\ln\frac{P(b_1)}{P(b_2)}}{\sqrt{2G_шE_1'}}\right)\right]+$$

$$+P(b_2)\,\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{E_1'-G_ш\ln\frac{P(b_1)}{P(b_2)}}{\sqrt{2G_шE_1'}}\right)\right].$$

При использовании ортогональных сигналов $s'_1(t)$ и $s_2'(t)$ с одинаковыми энергиями $E'_1=E'_2=E'$ (система с активной паузой) имеем

$$E_э=\int\limits_0^T[s_1'(t)-s_2'(t)]^2\,dt=\int\limits_0^T s_1'^2(t)\,dt-2\int\limits_0^T s_1'(t)\,s_2'(t)\,dt+$$

$$+\int\limits_0^T s_2'^2(t)\,dt=2E' \quad \text{и}$$

$$p_{0ш}=P(b_1)\left[1-\Phi\left(\frac{2E'+G_ш\ln\frac{P(b_1)}{P(b_2)}}{2\sqrt{G_шE'}}\right)\right]+$$

$$+P(b_2)\,\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{2E'-G_ш\ln\frac{P(b_1)}{P(b_2)}}{2\sqrt{G_шE'}}\right)\right].$$

При использовании противоположных сигналов $s_1(t)=-s'_2(t)$ имеем $E_э=\int\limits_0^T 4s'^2_1(t)\,dt=4E'$ и

$$p_{ош}=P(b_1)\,\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{4E'+G_ш\ln\frac{P(b_1)}{P(b_2)}}{2\sqrt{2G_шE'}}\right)\right]+$$

$$+P(b_2)\,\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{4E'-G_ш\ln\frac{P(b_1)}{P(b_2)}}{2\sqrt{2G_шE'}}\right)\right].$$

Если $P(b_1)=P(b_2)$, то $p_{ош}=\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\sqrt{\frac{E_э}{2G_ш}}\right)\right]$.

При АМ $E_э=E'$;

$$p_{ош\,АМ}=\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\sqrt{\frac{E'}{2G_ш}}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\sqrt{\frac{1}{2}h_0^2}\right)\right].$$

Величина $h_0^2 = \frac{E'}{G_{ш}} = \frac{\gamma^2 P_с T}{G_{ш}} = \frac{\gamma^2 P_с}{P_{ш}}$ — отношение *сигнал/шум* на входе приемника.

В системе ЧМ с ортогональными сигналами

$$p_{ош\ чм} = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E'}{G_{ш}}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\sqrt{h_0^2}\right)\right].$$

В системе ФМ с противоположными сигналами

$$p_{ош\ фм} = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{2E'}{G_{ш}}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\sqrt{2h_0^2}\right)\right].$$

Р.5.3.5. Согласно Р.5.3.4 вероятность ошибки в двоичной системе при точно известных сигналах и равновероятных символах определяется выражением $p_{ош} = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E_э}{2G_{ш}}}\right)\right]$ и тем меньше, чем больше $E_э$. При произвольных сигналах $s_1(t)$ и $s_2(t)$

$$E_э = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2\, dt.$$

Определим условия, при которых $E_э$ максимальна, полагая, что $E_1' = \int_0^T s_1'^2(t)\, dt \leqslant E'$; $E_2' = \int_0^T s_2'^2(t)\, dt \leqslant E'$.

Записав $E_э = 2E'_1 + 2E'_2 - \int_0^T [s'_1(t) + s'_2(t)]^2 dt$, заметим, что для получения максимума этого выражения нужно сделать E'_1 и E'_2 возможно бо́льшими, а интеграл в правой части — как можно меньшим. Максимально возможные значения E'_1 и E'_2 будут, если $E'_1 = E'_2 = E'$.

Поскольку интеграл $\int_0^T [s'_1(t) + s'_2(t)]^2 dt$ принимает только положительные значения, его минимум равен нулю и достигается при условии $s'_1(t) = -s'_2(t)$, т. е. при противоположных сигналах. Таким образом, в двоичном канале с постоянными параметрами и аддитивным флуктуационным шумом минимальную вероятность ошибки обеспечивает система с противоположными сигналами, так как у них эквивалентная энергия максимальна (при фиксированной энергии сигналов).

Р.5.3.6. При приеме сигналов ОФМ по методу сравнения полярностей осуществляется когерентное (фазовое) детектирование смеси канального сигнала и шума с последующей перекодировкой символов, которая осуществляется сравнением полярностей каждого принятого символа с предыдущим [19]. Очевидно, что вероятность $p_{\text{ошОФМ}}$ ошибочной регистрации символов в системе ОФМ не совпадает с вероятностью появления искаженных знаков на выходе фазового детектора или, что то же самое, с вероятностью ошибок $p_{\text{ошФМ}}$ в системе «классической» фазовой манипуляции ФМ (см. Р.5.3.4).

Очевидно, что ошибочная регистрация символов при приеме методом сравнения полярностей возможна в результате одного из двух несовместимых событий:

а) знак данного элемента принят ошибочно, а знак предыдущего — верно;

б) знак данного элемента принят верно, а предыдущего — ошибочно.

Каждое из этих событий имеет вероятность $p_{\text{ош ФМ}}(1-p_{\text{ошФМ}})$. Следовательно, $p_{\text{ошОФМ}}=2p_{\text{ошФМ}}\times$ $\times(1-P_{\text{ошФМ}})$. В области малых ошибок, когда $p_{\text{ош ФМ}}\ll 1$, с учетом Р.5.3.4 получаем $p_{\text{ошОФМ}}\approx 2p_{\text{ошФМ}}=$ $=1-\Phi(\sqrt{2h^2_0})$. При $P_{\text{с}}=0{,}5$ Вт, $\gamma=10^{-2}$, $T=10$ мс и $G_{\text{ш}}=10^{-7}$ Вт/Гц имеем $h^2_0=5$ и $p_{\text{ошОФМ}}=1{,}6\cdot 10^{-3}$.

Р.5.3.7. Сравнивая выражения для вероятностей ошибок, полученные в Р.5.3.4, замечаем, что для сохранения вероятности ошибки неизменной при переходе от АМ к ЧМ необходимо выполнить условие $h^2_{0\text{ЧМ}}=$ $=\frac{1}{2}\,h^2_{0\text{АМ}}$, или $U_{m\text{АМ}}=U_{m\text{АМ}}/\sqrt{2}$. Изменение амплитуды колебания в $\sqrt{2}$ раз приводит к изменению пиковой мощности передатчика в 2 раза. Отсюда следует, что переход от АМ к ЧМ при неизменной вероятности ошибки дает выигрыш по пиковой мощности, равный 2. Аналогично находим, что переход от ЧМ к ФМ дает выигрыш по пиковой мощности, равный 2, а переход от АМ к ФМ — 4.

При равновероятных сигналах в системе АМ (система с пассивной паузой) $P_{\text{с}}=0{,}5\,P_{\text{макс}}$. В системах ЧМ и ФМ (системы с активной паузой) $P_{\text{с}}=P_{\text{макс}}$ Отсюда следует, что переход от АМ к ЧМ не дает выигрыша по средней мощности, при переходе от ЧМ к ФМ выигрыш по средней мощности равен 2, при переходе от АМ к ФМ выигрыш по средней мощности также равен 2.

Р.5.3.8. Полагая, что на вход приемника поступает процесс $z(t) = s_i(t) + u(t)$, для напряжения на выходе интегратора получаем

$$\theta = (-1)^{i-1} kE\cos\varphi + k\sqrt{\frac{2E}{T}}\int\limits_0^T u(t)\cos(\omega_0 t + \varphi)\,dt,$$

$$i = 1,\ 2.$$

Очевидно, что θ является нормальной случайной величиной со средним $m_\theta = (-1)^{i-1}kE\cos\varphi$ и дисперсией $\sigma^2 = k^2\frac{G_ш E}{2}$.

Условная плотность вероятности величины θ при условии передачи сигнала $s_i(t)$

$$w_1(\theta/s_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{k^2\frac{E\,G_ш}{2}}}\exp\left[-\frac{(\theta + (-1)^{i-1}kE\cos\varphi)^2}{kE\,G_ш}\right],$$

$$i = 1,\ 2.$$

Используя методику решения задачи 5.3.4, после несложных преобразований получаем для вероятности ошибки $p_{ош}(\varphi) = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\sqrt{2h^2{}_0}\cos\varphi\right)\right]$ $\left(h^2{}_0 = \frac{E}{G_ш},\right.$ $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ — функция Крампа).

Сравнивая полученное выражение с выражением, найденным в задаче 5.3.4, легко заметить, что несинфазность принимаемого сигнала и опорного колебания при фазовой манипуляции ведет к энергетическому проигрышу

$$\eta = \frac{h_0^2}{h_0^2\cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi}.$$

При $\eta \leqslant 1{,}1$ $\varphi \leqslant 18°$.

Р.5.3.9. Полагая, что φ является случайной величиной, принимающей в моменты $t = nT$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ значения на интервале $(-\pi, \pi)$, можно найти среднее значение вероятности ошибки $p_{ош}(\varphi)$, найденной в Р.5.3.8, усреднив ее по всем возможным значениям φ:

$$\overline{p_{ош}(\varphi)} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} p_{ош}(\varphi)\,w_1(\varphi)\,d\varphi.$$

Подставляя сюда выражения для $p_{\text{ош}}(\varphi)$ из предыдущей задачи и выражение $w_1(\varphi)$, находим

$$\overline{p_{\text{ош}}(\varphi)} = \frac{1}{2}\left\{1 - \int_{-\pi}^{\pi} \Phi\left(\sqrt{2h_0^2}\cos\varphi\right)\left[\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}a^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{2\pi}} F(a\cos\varphi)\, e^{-\frac{1}{2}a^2\sin^2\varphi}\right] d\varphi\right\}.$$

Полученный интеграл в общем виде не вычисляется в элементарных функциях. В частном случае при $a = \sqrt{2}h_0$ имеем

$$\overline{p_{\text{ош}}(\varphi)} = \frac{1}{2}\left\{1 - \int_{-\pi}^{\pi} \Phi\left(\sqrt{2h_0^2}\cos\varphi\right)\left[\frac{1}{2\pi} e^{-h_0^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\sqrt{2}h_0\cos\varphi}{\sqrt{2\pi}} F(\sqrt{2}h_0\cos\varphi) e^{-h_0^2\sin^2\varphi}\right] d\varphi\right\} = \frac{1}{2} e^{-h_0^2}.$$

Полезно отметить, что при сделанных предположениях помехоустойчивость системы ФМ такая же, как и системы ОФМ при приеме по методу сравнения фаз (Р.5.4.5).

Р.5.3.10. Используя алгоритм работы корреляционного приемника сигналов ФМ при точно известных параметрах канала (5.18) можно записать с учетом неточности синхронизации

$$\int_{\tau}^{T+\tau} z(t)\, s_{\text{оп}}(t)\, dt \overset{1}{\underset{0}{\gtrless}} 0, \quad z(t) = s_i(t) + u(t).$$

Полагая, что на интервале $(0, T)$ передается сигнал $s_1(t)$, а на интервале $(T, 2T)$ — сигнал $s_2(t)$, запишем

$$\int_{\tau}^{T} [s_1(t) + u(t)]\, s_{\text{оп}}(t)\, dt + \int_{T}^{T+\tau} [s_2(t) + u(t)]\, s_{\text{оп}}(t)\, dt \overset{1}{\underset{0}{\gtrless}} 0.$$

В данном случае ошибка будет иметь место при выполнении условия

$$\int_{\tau}^{T} [s_1(t) + u(t)]\, s_{\text{оп}}(t)\, dt + \int_{T}^{T+\tau} [s_2(t) + u(t)]\, s_{\text{оп}}(t)\, dt < 0.$$

Подставляя сюда выражения сигналов $s_1(t)$, $s_2(t)$ и $s_{\text{оп}}(t)$ и осуществляя простые преобразования, получаем

$$\int_{\tau}^{T+\tau} u(t)\sqrt{\frac{2E}{T}}\cos(\omega_0 t+\varphi_0)\,dt < -E\left(1-\frac{2\tau}{T}\right).$$

Как и в задаче 5.3.8, величина интеграла в левой части неравенства представляет собой нормальную случайную величину с дисперсией $\sigma^2 = EG_{\text{ш}}/2$. Вероятность ошибки равна вероятности выполнения полученного неравенства и определяется выражением

$$p_{\text{ош}} = \int_{-\infty}^{-E\left(1-\frac{2\tau}{T}\right)} w(\Theta)\,d\Theta, \text{ где } \Theta = \int_{\tau}^{T+\tau} u(t)\sqrt{\frac{2E}{T}}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\,dt.$$

С учетом нормального распределения величины θ получаем

$$p_{\text{ош}} = \frac{1}{2}\left\{1-\Phi\left[\sqrt{\frac{2E}{G_{\text{ш}}}}\left(1-\frac{2\tau}{T}\right)\right]\right\} = \frac{1}{2}\left\{1-\Phi\left[\sqrt{2h_0^2}\left(1-\frac{2\tau}{T}\right)\right]\right\}.$$

Сравнивая полученное выражение для вероятности ошибки с выражением для случая точной синхронизации ($\tau=0$) (см. Р.5.3.4), замечаем, что неточная синхронизация приводит к энергетическому проигрышу

$$\eta = \frac{h_0^2}{h_0^2\left(1-\frac{2\tau}{T}\right)^2} = \frac{1}{\left(1-\frac{2\tau}{T}\right)^2}.$$

При $\eta \leqslant 1{,}1$ $\tau \leqslant 2{,}5\cdot 10^{-2}T$.

Р.5.3.11. Легко показать, что в данном случае вероятность ошибки будет определяться соотношением

$$p_{\text{ош}} = \frac{1}{2}\left\{1-\Phi\left[\sqrt{2h_0^2}\cos\varphi\left(1-\frac{2\tau}{T}\right)\right]\right\}.$$

Отсюда энергетический проигрыш $\eta = \frac{1}{\cos^2\varphi\left(1-\frac{2\tau}{T}\right)^2}$. Задаваясь величиной $\eta=1{,}1$ (потеря мощности передатчика составляет 10%), находим, что при $\tau=0$ $\varphi=18°$ (этот результат получен Л. М. Финком в [24]). Если положить $\varphi=0$, то $\tau=0{,}025\,T$, т. е. допустимая рассинхронизация составляет 2,5% от длительности элементарной посылки. Очевидно, что при $\varphi \neq 0$ и $\tau \neq 0$ допустимые погрешности будут соответственно меньше: 18° и $0{,}025\,T$.

В табл. 5.1 приведены значения φ и τ, при которых величина энергетического проигрыша не превышает величину 1,1 ($\eta = 1{,}1$).

ТАБЛИЦА 5.1

φ	0	6°48′	10°30′	13°24′	15°30′	18°
τ	$2{,}5\cdot 10^{-2}\,T$	$2\cdot 10^{-2}\,T$	$1{,}5\cdot 10^{-2}\,T$	$10^{-2}\,T$	$5\cdot 10^{-3}\,T$	0

Р.5.3.12

$$p_{\text{ош АМ}} = \frac{1}{2}\left\{1 - \Phi\left[\sqrt{2h_0^2}\left(\frac{T-\tau}{T}\cos\varphi - \frac{1}{2}\right)\right]\right\};$$

$$\eta_{\text{АМ}} = \frac{1}{4\left[\left(1-\frac{\tau}{T}\right)\cos\varphi - \frac{1}{2}\right]^2};$$

$$p_{\text{ош ЧМ}}\,\frac{1}{2}\left\{1 - \Phi\left[\left(\sqrt{h_0^2}\cos\varphi\left(1 - \frac{2\tau}{T}\right)\right)\right]\right\};$$

$$\eta_{\text{ЧМ}} = \frac{1}{\cos^2\varphi\left(1 - \frac{2\tau}{T}\right)^2}.$$

Р.5.3.13. Воспользуемся алгоритмом работы когерентного приемника, найденным в Р.5.1.6. При передаче сигнала $s_1(t)$ ошибка произойдет в том случае, когда $\int\limits_0 z(t)s_{\text{оп}}(t) < 0$, где $z(t) = s_1(t) + u(t)$. Подставляя сюда значения $s_1(t)$ и $s_{\text{оп}}(t)$, получаем после очевидных преобразований

$$\int\limits_0^T u(t)\sqrt{\frac{2E}{T}}\cos\left[(\omega_0 + \Delta\omega)\,t + \varphi\right]dt < -\frac{E}{T\,\Delta\omega}\sin\Delta\omega T.$$

С учетом сказанного в Р.5.3.8 для вероятности ошибки в данном случае можно записать

$$p_{\text{ош ФМ}} = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\sqrt{2h_0^2}\,\frac{\sin\Delta\omega T}{\Delta\omega T}\right)\right].$$

Для энергетического проигрыша в этом случае имеем $\eta = \frac{(\Delta\omega T)^2}{\sin^2 \Delta\omega T}$. Задаваясь допустимой величиной $\eta = 1{,}1$, получаем для допустимой величины частотной расстройки $\Delta\omega = \pm 0{,}54/T$.

Р.5.3.14

$$p_{\text{ош АМ}} = \frac{1}{2}\left\{1 - \Phi\left[\sqrt{2h_0^2}\left(\frac{\sin \Delta\omega T}{\Delta\omega T} - \frac{1}{2}\right)\right]\right\},$$

$$\eta_{\text{АМ}} = \frac{1}{4\left(\frac{\sin \Delta\omega T}{\Delta\omega T} - \frac{1}{2}\right)^2};$$

$$p_{\text{ош ЧМ}}\ \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\sqrt{h_0^2}\,\frac{\sin \Delta\omega T}{\Delta\omega T}\right)\right]; \quad \eta_{\text{ЧМ}} = \frac{(\Delta\omega T)^2}{\sin^2 \Delta\omega T}.$$

При $\eta = 1{,}1$ в случае ЧМ допустимая величина частотной расстройки $\Delta\omega = \pm 0{,}54/T$, а в случае АМ $\Delta\omega = \pm 0{,}39/T$.

Р.5.3.15. Как показано в Р.5.3.4, вероятность ошибки при корреляционном приеме двоичной ФМ $p_{\text{ош}} = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\sqrt{2h_0^2}\right)\right]$. Найдем вероятность ошибки при интегральном приеме. На выходе интегратора имеем при передаче сигнала $s_1(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \omega_0 t$

$$\Theta = \int_0^T \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \omega_0 t\, dt + \int_0^T u(t)\, dt.$$

Если $\theta > 0$, то фиксируется символ, соответствующий сигналу $s_1(t)$, в противном случае фиксируется символ, соответствующий сигналу $s_2(t)$. Если при этом передавался сигнал $s_1(t)$, то произойдет ошибка. Таким образом, условием ошибки является выполнение неравенства

$$\int_0^T u(t)\, dt < -\int_0^T \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \omega_0 t\, dt,$$

или

$$\int_0^T u(t)\, dt < -\sqrt{\frac{2E}{T}}\, \frac{\sin \omega_0 T}{\omega_0}.$$

Величина $\lambda=\int\limits_0^T u(t)\,dt$ является нормальной, имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию $\sigma^2=\frac{G_{\text{ш}}T}{2}$. Поэтому

$$p_{\text{ош}}=\int\limits_{-\infty}^{-\sqrt{\frac{2E}{T}}\frac{\sin\omega_0 T}{\omega_0}} w_1(\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{\sqrt{\frac{2E}{T}}\frac{\sin\omega_0 T}{\omega_0}}{\sqrt{\frac{G_{\text{ш}}T}{2}}}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{\sqrt{2h_0^2}\sin\omega_0 T}{\omega_0 T}\right)\right];\qquad \eta=\frac{\omega_0^2T^2}{2\sin^2\omega_0 T}.$$

Р.5.3.16. Аналогично Р.5.3.8 можем записать для условия ошибки при передаче сигнала $s_1(t)$: $\int\limits_0^T z(t)\times$ $\times s_{\text{оп}}(t)\,dt<0$, где $z(t)=\sqrt{\frac{2E}{T}}\exp\left(-\beta^2\left(t-\frac{T}{2}\right)^2\right)\cos\omega_0 t+$ $+u(t)$,

или

$$\frac{E}{T}\int\limits_0^T\exp\left[-\beta^2\left(t-\frac{T}{2}\right)^2\right]dt+\int\limits_0^T\sqrt{\frac{2E}{T}}\cos\omega_0 t\,u(t)\,dt<0.$$

После простых преобразований находим

$$\int\limits_0^T u(t)\sqrt{\frac{2E}{T}}\cos\omega_0 t<-\frac{E}{T}\frac{\sqrt{\pi}}{\beta}\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{T\beta}{\sqrt{2}}\right).$$

Учитывая, что $\int\limits_0^T u(t)\sqrt{\frac{2E}{T}}\cos\omega_0 t\,dt$ представляет собой нормальную случайную величину с дисперсией $EG_{\text{ш}}/2$, находим вероятность ошибки

$$p_{\text{ош}}=\frac{1}{2}\left\{1-\Phi\left[\sqrt{\frac{2E}{G_{\text{ш}}}}\frac{\sqrt{\pi}}{T\beta}\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{T\beta}{\sqrt{2}}\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1-\Phi\left[\sqrt{2h_0^2}\frac{\sqrt{\pi}}{T\beta}\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{T\beta}{\sqrt{2}}\right)\right]\right\}.$$

Энергетический проигрыш по сравнению со случаем отсутствия линейных искажений составляет величину

$$\eta = \frac{1}{\left[\frac{\sqrt{\pi}}{T\beta}\,\frac{1}{2}\,\Phi\left(\frac{T\beta}{\sqrt{2}}\right)\right]^2}.$$

Например, при $\beta=0{,}1\,T^{-1}$ $\eta=1{,}89$.

Р.5.3.17. В соответствии с Р.5.3.4 средняя вероятность ошибки приемника, алгоритм работы которого найден в Р.5.1.11, определяется формулой $p_{\text{ош}} = \frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\sqrt{\frac{E_{\text{э}}}{2G_{\text{ш}}}}\right)\right]$, где $E_{\text{э}} = \int\limits_0^T [\,s_1'(t) - s_2'(t)]^2 dt$.

При идеальной обратной связи по решению и $D=0$ реализации сигналов на приеме, соответствующие передаче «1» и «0», равны согласно Р.5.1.11: $s'_1(t) = g_1(t)$, $s'_2(t) = -g_1(t)$. Следовательно, $E_{\text{э}}=4E'_1$, $E'_1=\int\limits_0^T g^2_1(t)\,dt$ — энергия первого элемента реакции канала на элементарный сигнал. В этом случае $p_{\text{ош}} = \frac{1}{2}[1-\Phi(\sqrt{2h^2})]$; $h^2 = \frac{E_1'}{G_{\text{ш}}}$. Полагая, что относительная энергия первого элемента реакции

$$\frac{E_1'}{E'} = \alpha\,(0\leqslant\alpha\leqslant 1),\quad E' = \int\limits_0^T g_1^2(t)\,dt + \int\limits_T^{2T} g_2^2(t)\,dt$$

(полная энергия принимаемого сигнала), получаем

$$p_{\text{ош}} = \frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\sqrt{2\alpha h_0^2}\right)\right],$$

где $h^2_0=E'/G_{\text{ш}}$.

Очевидно, что приемник, реализующий предельно возможную помехоустойчивость в заданном канале, обеспечивает вероятность ошибки

$$p_{\text{ош}} = \frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\sqrt{2h_0^2}\right)\right].$$

Энергетический проигрыш при использовании анализируемого приемника $\eta = 1/\alpha$.

Р.5.3.18. Квадрат модуля комплексного коэффициента передачи «обеляющего» фильтра найдем как

$$K^2(f) = \frac{a}{G_0(f)} = \frac{a}{2\alpha}\left[\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2\right], \quad a = \text{const}.$$

Спектральная плотность мощности шума на выходе «обеляющего» фильтра $G'_ш = G_0(f)\,K^2(f) = a$.

Комплексный коэффициент передачи «обеляющего» фильтра можно записать

$$\mathbf{K}(f) = \sqrt{\frac{a}{2\alpha}}\left[\alpha + \mathrm{i}(\omega - \omega_0)\right].$$

Учитывая, что умножение на $\mathrm{i}\omega$ в частотной области эквивалентно дифференцированию во временной области, для сигналов на выходе «обеляющего» фильтра получаем:

$$s_1'(t) = \sqrt{\frac{a}{2\alpha}}\left[\alpha s_1(t) + \frac{d}{dt}s_1(t)\right];$$

$$s_2'(t) = -\sqrt{\frac{a}{2\alpha}}\left[\alpha s_1(t) + \frac{d}{dt}s_1(t)\right].$$

Используя теперь формулу для вероятности ошибки при оптимальном когерентном приеме противоположных сигналов (Р.5.3.4), находим вероятность ошибки при использовании метода выбеливания в заданных условиях:

$$p_{ош} = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{1}{\alpha}\int_0^T \left[\alpha s_1(t) + \frac{d}{dt}s_1(t)\right]^2 dt}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{U_m^2 T}{2}\left(\alpha + \frac{\omega_0^2}{\alpha}\right)}\right)\right].$$

Найдем теперь спектральную плотность мощности белого шума, имеющего в полосе $f_0 \pm F$ такую же среднюю мощность, что и заданный небелый шум:

$$G_ш = \frac{1}{2F}\int_{f_0-F}^{f_0+F} G(f)\,df = \frac{\alpha}{F}\int_{f_0-F}^{f_0+F}\frac{df}{4\pi^2(f - f_0)^2 + \alpha^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi F}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2\pi F}{\alpha}.$$

Вероятность ошибки при оптимальном когерентном приеме

$$p_{\text{ош}} = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{U_m^2 T}{2}\,\frac{4\pi F}{\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2\pi F}{\alpha}}}\right)\right].$$

Энергетический проигрыш, связанный с наличием небелого шума,

$$\eta = \frac{\alpha + \dfrac{\omega_0^2}{\alpha}}{4\pi F}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\pi F}{\alpha} = \left(\frac{\alpha}{4\pi F} + \frac{2\pi f_0^2}{2\alpha F}\right)\operatorname{arc\,tg}\frac{2\pi F}{\alpha}$$

5.4. Алгоритм оптимального приема и помехоустойчивость при неопределенной фазе и амплитуде сигнала

Считаем, что межсимвольной интерференцией в месте приема можно пренебречь, интервал анализа $T_{\text{а}} = T$, передаваемые символы равновероятны, а канальные сигналы, соответствующие передаче i-го символа, узкополосные, т. е. могут быть представлены в виде

$$s_i'(t) = \gamma\,[\cos\theta\, s_i(t) - \sin\theta\, \hat{s}_i(t)], \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5.33}$$

где θ — фазовый сдвиг в канале; γ — коэффициент передачи канала.

Если фаза сигнала θ (а может быть также амплитуда γ и другие параметры сигнала) неизвестна на интервале анализа, то приемное устройство должно быть некогерентным[1] (не требовать знания фазовых соотношений для своей реализации). По критерию максимального правдоподобия алгоритм оптимального приемного устройства в этих условиях с учетом (5.3) можно определить так:

$$\overline{w(z(t)/b_i,\ \gamma,\ \theta, \ldots)} \mathrel{\overset{b_i}{\underset{b_j}{\gtrless}}} \overline{w(z(t)/b_j,\ \gamma,\ \theta, \ldots)}, \tag{5.34}$$

где $w(z(t)/b_i, \gamma, \theta \ldots)$ — функция правдоподобия передачи символа b_i при заданном $z(t)$ и фиксированных значениях параметров γ, θ; черта наверху — знак усреднения по случайным (неизвестным точно) параметрам.

Задачи

5.4.1. Ансамбль сигналов в месте приема, соответствующий передаче m символов, определяется согласно (5.33), причем фаза θ случайна и равномерно распределена на интервале $(-\pi, \pi)$. В канале действует стационарный нормальный белый шум с энергетическим спектром $G_ш$. Определить алгоритм оптимального приема при анализе принимаемой смеси на интервале T, показать возможность его реализации на базе корреляционной техники и на основе согласованных фильтров.

---

[1] Анализируются оптимальные приемные устройства при неопределенной фазе, принимающие решения на основе анализа $z(t)$ на всем временном интервале $(0, T)$.

5.4.2. Показать, что если используется ансамбль сигналов с активной паузой ($E'_i = \text{const}$) в канале с белым стационарным нормальным шумом, то при неопределенной равномерно распределенной фазе алгоритм оптимального приема независимо от закона распределения амплитуды сигнала выражается так:

$$V_i \underset{b_j}{\overset{b_i}{\gtrless}} V_j, \quad i \neq j, \tag{5.35}$$

где $V_i = \sqrt{\left[\int\limits_0^T z(t)\, s_i(t)\, dt\right]^2 + \left[\int\limits_0^T z(t)\, \hat{s}_j(t)\, dt\right]^2}$; $s_i(t)$, $\hat{s}_i(t)$ —i-й сигнал на передаче и его сопряжение по Гильберту.

5.4.3. Показать, что в каналах с неопределенной фазой и флуктуационной помехой типа «белый шум» максимальную помехоустойчивость имеет система с активной паузой и ортогональными в усиленном смысле сигналами. Вычислить вероятность ошибки для двоичной системы $p_{ош}$ при $F_к = 1$ кГц, $G_ш = 10^{-11}$ Вт/Гц, $\gamma^2 = 10^{-8}$, $P_с = 10$ Вт. Каков энергетический проигрыш, связанный с незнанием фазы сигнала?

5.4.4. По данным предыдущей задачи найти вероятность ошибки $p_{ошm}$ при оптимальном некогерентном приеме сигналов m-позиционной системы с активной паузой, ортогональной в усиленном смысле. Показать, что в области малых ошибок $p_{ошm} \approx (m-1)\, p_{ош}$.

5.4.5. Составить алгоритм работы оптимального приемника сигналов двоичной ОФМ при неопределенной фазе сигнала и определить вероятность ошибки при $P'_с = 1$ мВт, $F_к = 500$ Гц, $G_ш = 5 \cdot 10^{-7}$ Вт/Гц. Каков энергетический проигрыш по сравнению со случаем точно известного сигнала?

5.4.6. При неизвестных законах распределения фазы и амплитуды сигнала часто используется критерий обобщенного максимального правдоподобия, сущность которого состоит в том, что из нескольких гипотез с неизвестными априорными вероятностями выбирается та, для которой максимум функции правдоподобия $w_1(z/b_i)$ больше, чем для других гипотез, причем максимум берется по всем параметрам, определяющим плотность вероятности. Показать, что для систем с активной паузой алгоритм приемного устройства, оптимального по этому критерию, не отличается от (5.35).

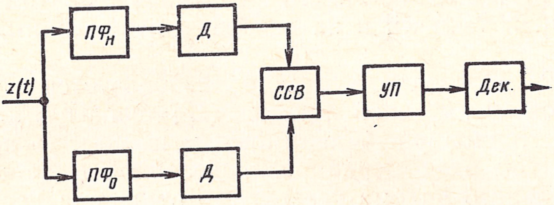


Рис. 5.17. Структурная схема неоптимального приема сигналов ЧМ методом сравнения огибающих в разделительных фильтрах

5.4.7. Определить среднюю вероятность ошибки при оптимальном некогерентном приеме сигналов двоичной ЧМ в канале с неопределенной фазой и медленными замираниями в соответствии с обобщенно-рэлеевским, рэлеевским и односторонне-нормальным законом распределения (см. задачи 1.2.9 — 1.2.11). Каков энергетический проигрыш (требуемое превышение мощности передатчика) при заданной вероятности ошибочного приема $p_{\text{ош}} = 10^{-4}$, связанный с замираниями: а) по обобщенно-рэлеевскому закону; б) по закону Рэлея; в) односторонне-нормальному закону по отношению к каналу с неопределенной фазой, но без замираний.

5.4.8. При приеме сигналов двоичной ЧМ распространена схема рис. 5.17, в которой ПФ$_\text{н}$ и ПФ$_0$ — полосовые фильтры, пропускающие область частот $F_э$ около частот нажатия и отжатия; *Д* — амплитудный детектор. В определенный момент времени на интервале T выбирается тот или иной символ в зависимости от того, в какой ветви мгновенное значение огибающей окажется больше. Полагая, что полоса фильтра $F_э = n/T$ ($n > 1$; T — длительность элемента сигнала), а в канале действует нормальный белый шум, найти вероятность ошибки и сравнить с вероятностью ошибки при оптимальном некогерентном приеме.

Решения и ответы

Р.5.4.1. Подставив (5.33) в выражение функции правдоподобия, найденное в Р.2.1.11, после простых преобразований получим для известных γ и θ

$$w_1(z/b_i)_{\gamma,\theta} = K_1 \exp\left[\frac{2\gamma}{G_{\text{ш}}}(Y_i\cos\theta - \hat{Y}_i\sin\theta) - \frac{\gamma^2 E_i}{G_{\text{ш}}}\right]$$

или, обозначив $V_i = \sqrt{Y_i^2 + \hat{Y}_i^2}$ и $\varphi_i = \operatorname{arctg}\frac{\hat{Y}_i}{Y_i}$,

$$w_1(z/b_i)_{\gamma,\theta} = K_1 \exp\left[\frac{2\gamma}{G_{\text{ш}}}V_i\cos(\theta - \varphi_i) - \frac{\gamma^2 E_i}{G_{\text{ш}}}\right].$$

Здесь $Y_i = \int\limits_0^T z(t)\,s_i(t)\,dt$; $\hat{Y}_i(t) = \int\limits_0^T z(t)\,\hat{s}_i(t)\,dt$; K_1 — нормирующий коэффициент, не зависящий от i. Усреднив $w(z/b_i)_{\gamma,\theta}$ по всем значениям θ, при равномерном распределении фазы на интервале $(-\pi, \pi)$ получим

$$w(z/b_i)_\gamma = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} w(z/b_i)_{\gamma,\theta}\,d\theta = K_1\exp\left(-\frac{\gamma^2 E_i}{G_{\text{ш}}}\right) I_0\left(\frac{2\gamma V_i}{G_{\text{ш}}}\right).$$

Здесь $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

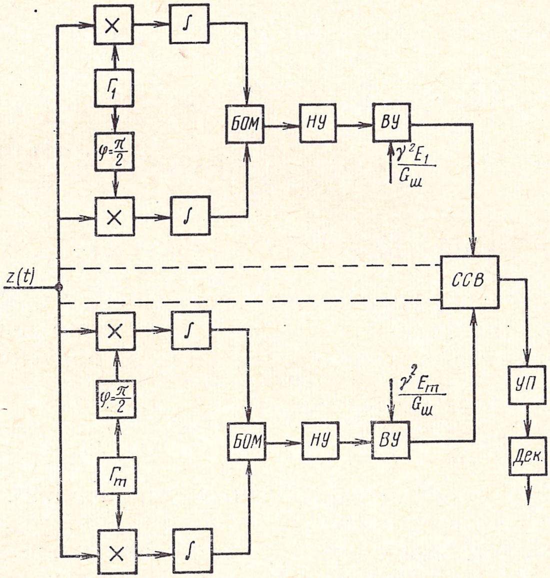
В соответствии с критерием максимального правдоподобия (5.4) находим алгоритм оптимального приема при неопределенной фазе

$$\max_i\left[\ln I_0\left(\frac{2\gamma V_i}{G_{\text{ш}}}\right) - \frac{\gamma^2 E_i}{G_{\text{ш}}}\right]. \tag{5.36}$$

Величины Y_i и $\hat{Y}_i$ можно получить на выходе корреляторов с опорными сигналами $s_i(t)$ и $\hat{s}_i(t)$ соответственно.

Структурная схема оптимального при неопределенной фазе приемника на базе корреляционной техники показана на рис. 5.18. На этой схеме $Г_i$ — генераторы опорных сигналов $s_i(t)$ с точностью до фазы; $\varphi_{\pi/2}$ — фазовращатели на $\frac{\pi}{2}$ (генераторы сопряженных сигналов); *БОМ* — блок определения модуля вектора $V_i = \sqrt{Y_i^2 + \hat{Y}_i^2}$ по ортогональным компонентам, *НУ* — нелинейные устройства с характеристикой $u_{\text{вых}} = \ln I_0\left(\frac{2\gamma}{G_{\text{ш}}}u_{\text{вх}}\right)$.

Как показано в Р.5.2.10, величины V_i не зависят от начальной фазы сигналов $s_i(t)$ и определяются огибающей (в момент окончания сигнала T) на выходе филь-



×
∫
$Г_1$
БОМ
НУ
ВУ
$\varphi=\frac{\pi}{2}$
$\frac{\gamma^2 E_1}{G_ш}$
×
∫
z(t)
ССВ
×
∫
$\varphi=\frac{\pi}{2}$
$\frac{\gamma^2 E_m}{G_ш}$
УП
БОМ
НУ
ВУ
Дек.
$Г_m$
×
∫

Рис. 5.18. Структурная схема оптимального по критерию максимального правдоподобия приемника при неопределенной фазе сигнала (квадратурная схема)

тра, согласованного с сигналом $s_i(t)$. Поэтому алгоритм (5.36) можно реализовать и на базе согласованных фильтров в соответствии со схемой рис. 5.19. Здесь $СФ_i$ — фильтр, согласованный с сигналом $s_i(t)$; $Д$ — детектор огибающей.

Р.5.4.2. При неопределенной равномерно распределенной фазе для систем с активной паузой ($E_i=E$) с учетом монотонного характера зависимости функции $\ln I_0(x)$ от аргумента $x\geqslant 0$ можно (5.35) записать в виде

$$\max_i [V_i] \quad \text{или} \quad V_i \underset{b_j}{\overset{b_i}{\gtrless}} V_j, \quad i \neq j. \tag{5.37}$$

Здесь, как и в Р.5.4.1,

$$V_i = \sqrt{\left(\int\limits_0^T z(t)\, s_i(t)\, dt\right)^2 + \left(\int\limits_0^T z(t)\, \hat{s}_i(t)\, dt\right)^2}.$$

Алгоритм (5.37) может быть использован для оптимальной обработки сигналов с активной паузой при любом законе распределения амплитуд, так как он не зависит от амплитуды сигнала (коэффициента передачи канала γ).

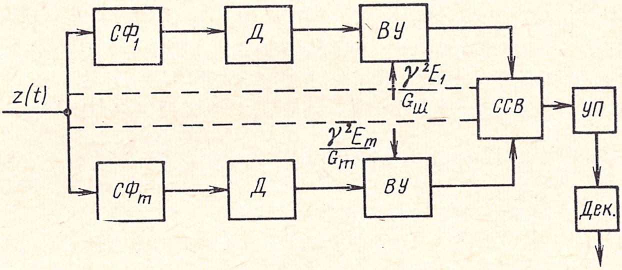


Рис. 5.19. Реализация оптимального по критерию максимального правдоподобия приемника при неопределенной фазе сигнала на базе согласованных фильтров

Р.5.4.3. Как показано в Р.5.2.10,

$$V_i = \sqrt{\left(\int\limits_0^T z(t)\, s_i(t)\, dt\right)^2 + \left(\int\limits_0^T z(t)\, \hat{s}_i(t)\, dt\right)^2}.$$

Если шум в канале отсутствует и передается символ b_i, то $z(t)=\gamma\cos\theta s_i(t)-\gamma\sin\theta\hat{s}_i(t)$ и $V_i=\gamma E$.

В этом случае

$$V_j = \sqrt{\left(\int\limits_0^T \gamma\cos\theta\, s_i(t)\, s_j(t)\, dt - \int\limits_0^T \gamma\sin\theta\, \hat{s}_i(t)\, s_j(t)\, dt\right)^2 + \rightarrow}$$

$$\overline{\rightarrow + \left(\int\limits_0^T \gamma\cos\theta\, s_i(t)\, \hat{s}_j(t)\, dt - \int\limits_0^T \gamma\sin\theta\, \hat{s}_i(t)\, \hat{s}_j(t)\, dt\right)^2}$$

Согласно Р.5.4.2 наиболее помехоустойчивой является та система, для которой при передаче символа b_i величина V_i оказывается наибольшей, а величины $V_{j\neq i}$ — наименьшими. Так как $V_j \geqslant 0$, то минимально возможное значение V_j равно нулю. Нетрудно заметить, что V_j будет равно нулю лишь при выполнении условий

$$\int_0^T s_i(t) s_j(t)\,dt = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \qquad \int_0^T s_i(t) \hat{s}_j(t)\,dt = 0 \quad \text{при}$$

любых i, j.

Но это есть не что иное, как условия ортогональности в усиленном смысле (см. § 1.4). Следовательно, в каналах с неопределенной фазой максимальную помехоустойчивость будет иметь система с активной паузой и ортогональными в усиленном смысле сигналами.

Определим вероятность ошибки при приеме по алгоритму $V_i \overset{b_i}{\underset{b_j}{\gtrless}} V_j$. При передаче символа b_i:

$$V_i = \sqrt{(\Lambda_i + XE)^2 + (\hat{\Lambda}_i + YE)^2}, \quad X = \gamma\cos\theta, \quad Y = \gamma\sin\theta;$$

$$V_j = \sqrt{\Lambda_j^2 + \hat{\Lambda}_j^2}; \quad \Lambda_i = \int_0^T U(t)\, s_i(t)\,dt; \quad \hat{\Lambda}_i = \int_0^T U(t)\, \hat{s}_i(t)\,dt.$$

Величины Λ_i, $\hat{\Lambda}_i$ распределены нормально и имеют нулевое среднее значение. При ортогональных сигналах величины Λ_i, $\hat{\Lambda}_i$ с различными индексами независимы [11], независимы и величины Λ_i, $\hat{\Lambda}_j$ вследствие взаимной ортогональности. Следовательно, независимы и величины V_i и $V_{j \neq i}$. Дисперсии величин Λ_i, $\hat{\Lambda}_i$ равны $G_{\text{ш}}E/2$. Для плотностей вероятности величины V_i, и V_j имеем:

$$w_1(V_j) = \frac{2V_j}{G_{\text{ш}}E} \exp\left(-\frac{V_j^2}{G_{\text{ш}}E}\right);$$

$$w_1(V_i) = \frac{2V_i}{G_{\text{ш}}E} \exp\left(-\frac{V_i^2 + \gamma^2 E^2}{E G_{\text{ш}}}\right) I_0\left(\frac{2\gamma V_i}{G_{\text{ш}}}\right).$$

Вероятность ошибки для двоичной системы, одинаковая при передаче любой позиции вследствие симметрии канала, определится вероятностью невыполнения неравенства $V_i > V_j$:

$$p = \int_0^\infty w_1(V_i) \int_{V_i}^\infty w(V_j)\, dV_i\, dV_j.$$

Интегрируя по V_j, получаем

$$p_{\text{ош}} = \int_0^\infty \frac{2V_i}{G_{\text{ш}} E} \exp\left(-\frac{2\gamma^2 E}{G_{\text{ш}}} - \frac{2V_i}{G_{\text{ш}} E}\right) I_0\left(\frac{2\gamma V_i}{G_{\text{ш}}}\right) dV_i.$$

Этот интеграл табличный [6] и равен:

$$p_{\text{ош}} = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{h_0^2}{2}\right); \quad h_0^2 = \frac{\gamma^2 E}{G_{\text{ш}}} = \frac{\gamma^2 P_{\text{c}}}{P_{\text{ш}}}.$$

Подставляя сюда числовые данные, получаем

$$h_0^2 = 10, \; p_{\text{ош}} = \frac{1}{2}\exp(-5) = 3{,}37\cdot 10^{-3}.$$

В канале с точно известными параметрами такая же вероятность ошибки будет обеспечена при $h^2{}_0 = 7{,}6$. Следовательно, незнание фазы сигнала приводит к энергетическому проигрышу $\eta = 1{,}31$.

Р.5.4.4. Согласно Р.5.4.2 алгоритм работы оптимального приемника m-позиционной системы с активной паузой, ортогональной в усиленном смысле, при неопределенной фазе можно записать в виде $V_i \underset{b_j}{\overset{b_i}{\gtrless}} V_j$.

При передаче символа b_i условием правильного приема является выполнение системы $m-1$ неравенств $V_i > V_j$ при всех $j \neq i$. Вероятность выполнения этих неравенств равна вероятности правильного приема:

$$p_{\text{пр},m} = \int_0^\infty w_1(V_i)\left[\int_0^{V_i} w_1(V_j)\,dV_j\right]^{m-1} dV_i.$$

Вероятность ошибки, характеризующая помехоустойчивость системы при неопределенной фазе сигнала,

$$p_{\text{ош},m} = 1 - p_{\text{пр},m} = 1 - \int_0^\infty w_1(V_i)\left[\int_0^{V_i} w_1(V_j)\,dV_j\right]^{m-1} dV_i.$$

Подставив сюда плотности вероятности величин V_i и V_j из Р.5.4.3 и разложив после интегрирования по V_j величину $\left(1-\exp\left(\frac{V_i^2}{EG_{\text{ш}}}\right)\right)^{m-1}$ по формуле бинома Ньютона, получим

$$p_{\text{ош},m} = 1 - \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n C_{m-1}^n \frac{1}{n+1}\exp\left(-\frac{n}{n+1}h_0^2\right),$$

$$h_0^2 = \frac{E}{G_\text{ш}}.$$

Отсюда при $m=2$ следует результат, полученный в Р.5.4.3 для двухпозиционной системы.

При больших отношениях *сигнал/шум,* заменяя обобщенное распределение Рэлея нормальным распределением с соответствующими параметрами (см. [15] и Р.5.4.3), получаем

$$p_{\text{ош}, m} \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{G_\text{ш} E}{2}}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(V_i - \gamma E)^2}{G_\text{ш} E}} \times$$

$$\times \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{V_i^2}{G_\text{ш} E}}\right)^{m-1} dV_i.$$

Используя для $\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{V_i^2}{G_\text{ш} E}}\right)^{m-1}$ формула бинома Ньютона и ограничиваясь первым членом, находим, что в области малых ошибок

$$p_{\text{ош},m} = \frac{1}{2}(m-1)\exp(h_0/2) = (m-1)\, p_\text{ош},$$

где $p_\text{ош}$ — вероятность ошибки в двухпозиционной системе.

Р.5.4.5. При ОФМ информационный параметр сигнала определяется двумя соседними посылками: (n—1)-й на интервале (0, T) и n-й на интервале (T, $2T$). Поэтому оптимальный алгоритм, найденный в Р.5.4.2, можно в данном случае записать

$$\max_i \left[\sqrt{\left(\int\limits_0^{2T} z(t)\, s_i'(t)\, dt\right)^2 + \left(\int\limits_0^{2T} z(t)\, \hat{s}_i'(t)\, dt\right)^2} \right], \quad i = 1,2,$$

где

$$z(t) = \begin{cases} z_{n-1}(t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T, \\ z_n(t) & \text{при } T \leqslant t \leqslant 2T. \end{cases}$$

Если сигнал (n—1)-й посылки имеет вид $\gamma U_m \cos \times \times (\omega_0 t + \theta)$, где θ — случайная начальная фаза, неизвестная на приеме, то систему сигналов при ОФМ можно записать так:

$s_1'(t) = \gamma U_m \cos(\omega_0 t + \theta)$ при передаче «1» n—1-й посылкой ($0 \leqslant t \leqslant T$),

$$s_2'(t) = \begin{cases} \gamma U_m \cos(\omega_0 t + \theta) \text{ при передаче «0» } n\text{-й посылкой } (T \leqslant t \leqslant 2T), \\ -\gamma U_m \cos(\omega_0 t + \theta) \text{ при передаче «1» } n\text{-й посылкой } (T \leqslant t \leqslant 2T). \end{cases}$$

Эти сигналы являются ортогональными в усиленном смысле. Поэтому с учетом выражения для $p_{\text{ош}}$ из Р.5.4.4 получаем $p_{\text{ош}\,\text{ОФМ}} = \frac{1}{2} \exp(-h^2{}_0)$, где учтено, что для реализаций сигналов $s'(t)$ и $s'_2(t)$ отношение энергии сигнала к спектральной плотности шума на интервале $2T$ равно удвоенному значению этого же отношения при длительности элемента сигнала T.

Полезно заметить, что полученное выражение совпадает с выражением для средней вероятности ошибки в системе ФМ при учете фазовой нестабильности (см. Р.5.3.9).

Согласно числовым данным $h^2{}_0 = 4$, $p_{\text{ош}\,\text{ОФМ}} = \frac{1}{2} e^{-4} = 9{,}15 \cdot 10^{-3}$. Для обеспечения такой же вероятности ошибки при приеме сигнала ОФМ в канале с точно известными параметрами (см. Р.5.3.6) необходимо иметь $h^2{}_0 = 3{,}5$. Таким образом, переход от когерентного приема двоичной ОФМ к некогерентному сопровождается энергетическим проигрышем $\eta = 1{,}14$.

Р.5.4.6. Функцию правдоподобия $w_1(z/b_i)$ запишем в виде

$$w_1(z/b_i) = K_1 \exp\left\{\frac{2}{G_{\text{ш}}}\left[x Y_i - y \hat{Y}_i - \frac{E_i}{2}(x^2 + y^2)\right]\right\},$$

где $Y_i = \int\limits_0^T z(t) s_i(t)\,dt$; $\hat{Y}_i = \int\limits_0^T z(t) \hat{s}_i(t)\,dt$; $x = \gamma \cos\theta$, $y = \gamma \sin\theta$.

Будем искать максимум функции

$$\ln w_1(z/b_i) = \frac{2}{G_{\text{ш}}}\left[x Y_i - y \hat{Y}_i - \frac{E_i}{2}(x^2 + y^2)\right] + \ln K_1.$$

Согласно обобщенному критерию максимального правдоподобия следует регистрировать символ b_i, если для всех $j \neq i$ выполняются неравенства

$$\max \ln w_1(z/b_i) > \max \ln w(z/b_j),$$

где максимум ищется по параметрам x и y. Параметры, обращающие $\ln w(z/b_i)$ в максимум, определяются из условий:

$$\frac{\partial \ln w_1(z/b_i)}{\partial x} = \frac{2}{G_{ш}}(Y_i - xE_i) = 0 \quad \text{или} \quad x = \frac{Y_i}{E_i};$$

$$\frac{\partial \ln w_1(z/b_i)}{\partial y} = \frac{2}{G_{ш}}(-\hat{Y}_i - yE_i) = 0 \quad \text{или} \quad y = -\frac{\hat{Y}_i}{E_i}.$$

Найденные значения x и y называют максимально правдоподобными оценками этих величин. Учитывая их, получаем

$$\ln w_1(z/b_i) = \frac{Y_i^2 + \hat{Y}_i^2}{E_i G_{ш}} + \ln K_1 = \frac{V_i^2}{E_i G_{ш}} + \ln K_1.$$

Отсюда оптимальный алгоритм принимает вид $\max_i\left(\frac{V_i^2}{E_i}\right)$. Для систем с активной паузой ($E_i = E$) найденный алгоритм сводится к алгоритму (5.35).

Р.5.4.7. В соответствии с Р.5.4.3 вероятность ошибки при оптимальном приеме сигналов двоичной ЧМ в канале с неопределенной фазой

$$p_{ош} = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\gamma^2 E}{G_{ш}}\right).$$

Для определения вероятности ошибки в случае замираний амплитуды сигнала необходимо данное выражение усреднить по всем значениям γ:

$$p_{ош} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\gamma^2 E}{G_{ш}}\right) w_1(\gamma)\, d\gamma.$$

Подставляя сюда для $w_1(\gamma)$ обобщенное распределение Рэлея, распределение Рэлея, односторонне-нормальное распределение и интегрируя, получаем следующие результаты [11].

При обобщенно-рэлеевском распределении амплитуд

$$p_{ош} = \frac{\exp\left\{-\frac{q^2 \overline{h_0^2}}{2(1+q^2) + \overline{h_0^2}}\right\}}{2 + \frac{\overline{h_0^2}}{1+q^2}}, \quad q^2 = \frac{\alpha_р^2}{\sigma^2}.$$

Положив $q^2=5$, получим

$$p_{\text{ош}}=\frac{\exp\left(-\frac{5\overline{h_0^2}}{12+\overline{h_0^2}}\right)}{2+\frac{\overline{h_0^2}}{6}},$$

Для рэлеевского распределения амплитуд $p_{\text{ош}}=\frac{1}{2+\overline{h_0^2}}$. При односторонне-нормальном распределении амплитуд

$$p_{\text{ош}}=\frac{1}{2\sqrt{1+\overline{h_0^2}}}.$$

На уровне $p_{\text{ош}}=10^{-4}$ имеет место энергетический проигрыш по сравнению со случаем приема в канале без замираний, равный: а) в обобщенно-рэлеевском канале 10 (10 дБ); б) в рэлеевском канале 420 (26 дБ); в) в односторонне-нормальном канале 10^5 (50 дБ).

Р.5.4.8. Если эффективная полоса пропускания разделительного фильтра $F_э=n/T$, $n>1$, а разнос между частотами нажатия и отжатия имеет порядок величины $F_э$, то при передаче частоты нажатия амплитуда сигнала на выходе $ПФ_0$ определяется только помехой в канале и имеет распределение Рэлея

$$w_1(r_0)=\frac{r_0}{G_{ш}F_э}\exp\left(-\frac{r_0^2}{2G_{ш}F_э}\right).$$

Здесь $G_{ш}F_э$ — дисперсия помехи на выходе фильтра.

Амплитуда же сигнала на выходе $ПФ_{н}$ обусловлена сигналом и помехой и распределена по обобщенному закону Рэлея

$$w_1(r_{н})=\frac{r_{н}}{G_{ш}F_э}\exp\left(-\frac{r_{н}^2+U_m^2}{2G_{ш}F_э}\right)I_0\left(\frac{r_{н}U_m}{G_{ш}F_э}\right),$$

где U_m — амплитуда сигнала на входе приемника. В этих условиях при симметрии канала

$$p_{\text{ош}}=\int\limits_0^\infty w_1(r_{н})\int\limits_{r_{н}}^\infty w(r_0)\,dr_0\,dr_{н}.$$

Интегрируя, получаем подобно Р.5.4.4 $p_{\text{ош}}=\frac{1}{2}\times$

$\times \exp\left(-\frac{U_m^2}{2\cdot 2G_ш F_э}\right)$. Обозначив $h_0^2=\frac{U_m^2 T}{2G_ш}$ и учтя, что $F_э=n/T$, получим

$$p_{ош}=\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{h_0^2}{2n}\right).$$

Эта величина больше вероятности ошибки при оптимальном некогерентном приеме в

$$\frac{p_{ош}}{p_{ош.опт}}=\frac{\exp\left(-\frac{h_0^2}{2n}\right)}{\exp\left(-\frac{h_0^2}{2}\right)}=\exp\left[\frac{h_0^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right] \text{раз.}$$

5.5. Сравнительная эффективность систем передачи дискретных сообщений

Сравнительную эффективность систем передачи дискретной информации, как и сравнительную эффективность корректирующих кодов (см. § 4.3), можно определять по энергетическому выигрышу $\eta_{P\,i/j}$ перехода от i-й системы к j-й, а также по выигрышу в эквивалентной вероятности ошибки $\alpha_{i/j}=\frac{p_{эi}}{p_{эj}}$. При этом удобно фиксировать среднюю скорость передачи информации $I'=$ $=\text{const}$.

Различные системы можно сравнивать также по удельной скорости передачи информации на 1 Гц полосы частот (коэффициенту использования полосы [9]) $\nu_i=I'_i/F_i$ при $p_э=\text{const}$. Выигрыш по этому показателю при переходе от i-й системы к j-й

$$\eta_{\nu i/j}=10\lg\frac{\nu_j}{\nu_i}=10\lg\frac{I'_j F_i}{I'_i F_j}. \qquad (5.42)$$

При фиксированной скорости передачи $I'=\text{const}$

$$\eta_{\nu_{i/j}}=\eta_{F_{i/j}}=10\lg\frac{F_i}{F_j} \qquad (5.43)$$

и определяет выигрыш по занимаемой системой полосе частот.

Можно также ввести показатель обобщенного выигрыша

$$\eta'_{i/j} = \eta_{P i/j} + \eta_{F i/j} = 10 \lg \frac{h^2_{эi} F_i}{h^2_{эj} F_j} . \qquad (5.44)$$

Универсальной характеристикой эффективности дискретной системы связи является коэффициент эффективности

$$K_с = \frac{C_с}{C} , \qquad (5.45)$$

где $C_с$ — пропускная способность системы (расширенного дискретного канала); C — пропускная способность используемого непрерывного канала, которая определяется при отношении *сигнал/шум,* обеспечивающем заданную эквивалентную вероятность ошибки $p_э$.

Задачи

5.5.1. Определить энергетический выигрыш η_P, выигрыш по полосе частот η_F и обобщенный выигрыш при переходе от двоичной системы АМ к двоичной системе ЧМ и ФМ при одинаковой вероятности ошибки в случае оптимального когерентного приема и фиксированной скорости передачи информации.

5.5.2. Найти эквивалентную вероятность ошибки для десятипозиционной системы ЧМ и ФМ в случае оптимального когерентного приема при $h^2_0 = 12{,}8$.

Определить выигрыш по эквивалентной вероятности ошибки при переходе от системы ЧМ к системе ФМ.

5.5.3. Найти эквивалентную вероятность ошибки для случая некогерентного оптимального приема пятипозиционной ЧМ при $h^2_0 = 16{,}5$

5.5.4. Найти энергетический выигрыш и обобщенный энергетический выигрыш при переходе от двоичной системы ЧМ к пятипозиционной системе ЧМ в канале с неопределенной фазой и флуктуационным шумом, полагая, что эквивалентная вероятность ошибки $p_э = 10^{-3}$ и скорость передачи информации остаются неизменными.

5.5.5. Найти величину коэффициента использования пропускной способности канала для четырехпозиционной системы ЧМ, обеспечивающей при неопределенной фазе и флуктуационном шуме эквивалентную вероятность ошибки $p_э = 10^{-4}$, полагая, что скорость передачи информации $I'=300$ бит/с, а полоса частот системы $F_к=3{,}1$ кГц.

5.5.6. Найти коэффициент использования пропускной способности канала в системе связи с $h^2_э=3$, $I'=$ $=300$ бит/с, $F_к=3{,}1$ кГц.

5.5.7. Одним из способов повышения помехоустойчивости связи при наличии замираний является разнесенный прием, сущность которого заключается в том, что переданное сообщение воспроизводится по нескольким сигналам, несущим одну и ту же информацию. Оценить вероятность ошибки в системе n-кратного разнесения с автовыбором наиболее сильного сигнала (рис. 5.20) при использовании двоичной системы с активной паузой, ортогональной в усиленном смысле (ЧМ), при медленных рэлеевских независимых замираниях в отдельных ветвях.

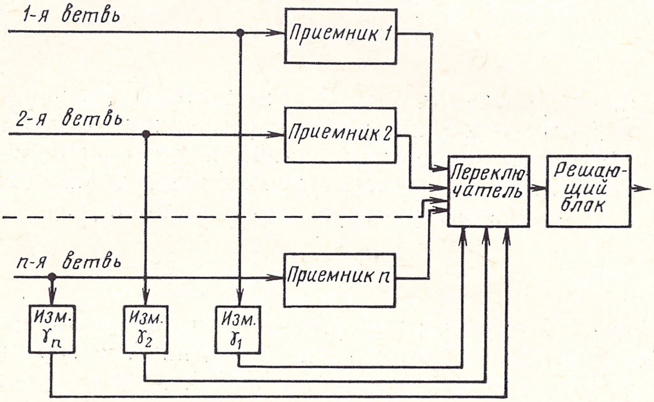


Рис. 5.20. Схема разнесенного приема с автовыбором ветви с наиболее сильным сигналом

5.5.8. Найти энергетический выигрыш при переходе от одиночного к сдвоенному приему с автовыбором в канале с медленными рэлеевскими независимыми замираниями в отдельных ветвях при неизменной вероятности ошибки $p_{ош,1}=p_{ош,2}=10^{-4}$.

5.5.9. Составной сигнал дискретной широкополосной системы ($B=2FT\gg 1$) строится следующем образом: информационная посылка длительностью T разбивается на N двоичных элементов длительностью $\tau_0=$ $=T/N$, а в качестве элементарного сигнала используются отрезки синусоидальных колебаний вида $U_m \sin(\omega_k t+\varphi_k)$ $\left(\omega_k=k\,\frac{2\pi}{T},\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ N\right)$, длительности τ_0.

Полагая, что указанные сигналы использованы для передачи двоичной информации в системе ЧМ, оценить вероятность ошибки при оптимальном когерентном приеме и удельную скорость передачи при $N=2000$, $T=20$ мс, если в канале действует стационарный нормальный белый шум со спектральной плотностью мощности $G_ш=10^{-6}$ Вт/Гц.

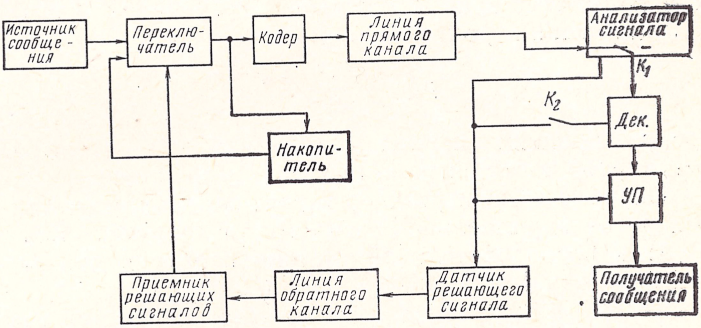

Источник сообще-ния
Переклю-чатель
Кодер
Линия прямого канала
Анализатор сигнала
K_1
K_2
Дек.
УП
Накопи-тель
Приемник решающих сигналов
Линия обратного канала
Датчик решающего сигнала
Получатель сообщения

Рис. 5.21. Структурная схема дискретной системы с управляющей обратной связью

5.5.10. Показать, что при использовании широкополосных сигналов с базой $B=2FT\gg 1$ влияние сосредоточенных по спектру помех уменьшается пропорционально базе сигнала.

5.5.11. На рис. 5.21 приведена структурная схема системы связи с управляющей обратной связью и поэлементной проверкой символов на надежность (ППСН). Здесь ключ K_1 анализатора замыкается, если выполняется условие $\frac{\gamma^2 E}{G_ш}>R$, и размыкается, если это условие не выполняется. Одновременно посылается команда от датчика решающих сигналов на передающую сторону и запрещается запись информации в устройство памяти.

Оценить эффективность этой системы в рэлеевском канале ($q^2=0$) в случае двоичной ЧМ.

5.5.12. Определить энергетический выигрыш η_P при переходе от параллельного метода передачи дискретной информации к последовательному в однолучевом гауссовском канале без замираний, если число подканалов параллельной системы равно n и если при этом переходе сохраняется: а) средняя мощность сигнала; б) пиковая мощность сигнала.

5.5.13. Известно, что в квазирэлеевском канале связи при аппроксимации коэффициента корреляции компонент канала функцией $R(T)=e^{-\frac{T^2}{2\beta^2}}$ и ОФМ несократимая вероятность ошибок

$$p_{\text{ош}} = \frac{T^2}{4\beta^2} e^{-q^2},$$

где β — средний период замираний; q^2 — превышение регулярной части сигнала над флуктуирующей.

Определить выигрыш по вероятности ошибки при переходе от параллельной системы с числом каналов $n=12$ к последовательной системе передачи при скорости передачи $I'=1200$ бит/с, $q^2=5$, $\beta=0{,}1$ с.

5.5.14. В двухлучевом рэлеевском канале со взаимным запаздыванием лучей $\Delta t=2$ мс длинные посылки ($T_1=5$ мс) обрабатываются на интервале анализа $T_{a1}=T_1-\Delta t$, а короткие посылки ($T_2<2$ мс) — на интервале анализа $T_{a2}=T_2+\Delta t$. При этом закон распределения энергии посылки на интервале анализа оказывается различным.

Определить энергетический выигрыш по средней мощности при переходе от параллельной системы с $n=20$ к последовательной при скорости передачи $I'=1200$ бит/с, если по обоим лучам распространения среднее превышение *сигнал/шум* одинаково и равно $\bar{h}^2{}_1=20$.

Решения и ответы

Р.5.5.1. Согласно ф-ле (5.41)

$$\eta_{Pi/j} = 10\lg\frac{h^2_{\text{э}i}}{h^2_{\text{э}j}}.$$

Принимая во внимание результат задачи 5.3.7 получаем,

$$\eta_{PAM/\text{ЧМ}} = 10\lg 2 = 3{,}03 \text{ дБ}; \quad \eta_{PAM/\text{ФМ}} = 10\lg 4 = 6{,}06 \text{ дБ};$$

$$\eta_{P\text{ЧМ/ФМ}} = 10\lg 2 = 3{,}03 \text{ дБ}.$$

Очевидно, что полосы частот систем АМ и ФМ одинаковы, а полоса частот системы ЧМ вдвое превышает полосу частот систем АМ и ФМ. Поэтому $\eta_{F\text{АМ/ФМ}}=$ $=0$ дБ; $\eta_{F\text{АМч/м}}=-3{,}03$ дБ; $\eta_{F\text{ЧМ/ФМ}}=3{,}03$ дБ. С учетом этого в соответствии с (5.44) находим обобщенный выигрыш: $\eta'_{\text{АМ/ФМ}}=6{,}06$ дБ; $\eta'_{\text{АМ/ЧМ}}=0$, дБ; $\eta'_{\text{ЧМ/ФМ}}=$ $=6{,}06$ дБ.

Р.5.5.2. Известно [12], что для m-позиционной системы

$$p_\text{э} = 1 - (1 - p_{\text{ош},m})^{1/\log_2 m}$$

При $p_{\text{ош},m} \ll 1$

$$p_\text{э} \approx \frac{p_{\text{ош},m}}{\log_2 m}.$$

Учитывая Р.5.3.3, находим

$$p_\text{э} \approx \frac{m-1}{\log_2 m}\, p_\text{ош}.$$

Используя результат задачи 5.4.4, можем записать:

$$p_{\text{э},10\text{ФМ}} = \frac{9}{\log_2 10}\,\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\sqrt{25}\right)\right] = 8{,}15\cdot 10^{-5};$$

$$p_{\text{э},10\text{ЧМ}} = \frac{9}{\log_2 10}\,\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\sqrt{12{,}5}\right)\right] = 6{,}32\cdot 10^{-3}.$$

Выигрыш по эквивалентной вероятности ошибки при переходе от системы ЧМ к системе ФМ в данном случае $\alpha_{\text{ЧМ/ФМ}}=77{,}5$.

Р.5.5.3. Аналогично Р.5.5.2 с учетом Р.5.4.4 находим

$$p_{\text{э},5\text{ЧМ}} = \frac{4}{\log_2 5}\,\frac{1}{2}\exp(-8) = 2{,}9\cdot 10^{-4}.$$

Учитывая, что $h^2_\text{э} = \dfrac{h_0^2}{\log_2 m}$ с учетом Р.5.4.5 и Р.5.5.2 можем записать

$$p_\text{э} \approx \frac{m-1}{2\log_2 m}\exp\left(-\frac{h_\text{э}^2\log_2 m}{2}\right),$$

откуда

$$h_\text{э}^2 = \frac{2}{\log_2 m}\ln\frac{m-1}{2p_\text{э}\log_2 m};\ \text{при } m=5\ h^2_{\text{э},5\text{ЧМ}}=6{,}9.$$

Для двоичной системы ЧМ при эквивалентной вероятности ошибки $p_э=2{,}9\cdot10^{-4}$ имеем

$$h^2_{э,2ЧМ}=h_0^2=2\ln\frac{1}{2p_э}=14{,}8.$$

Р.5.5.4 Для двоичной системы ЧМ

$$h^2_{э,2\ ЧМ}=h_0^2=2\ln\frac{1}{2p}=12{,}4.$$

Для пятипозиционной системы при $p=p_э=\mathrm{const}$, $I'=\mathrm{const}$ согласно Р.5.5.3

$$h^2_{5\ ЧМ}=\frac{2}{\log_2 5}\ln\frac{2}{p_э\log_2 5}=5{,}82.$$

Энергетический выигрыш согласно (4.20)

$$\eta_{2ЧМ/5ЧМ}=3{,}28\ дБ.$$

Полагая, что многопозиционная система с ортогональными сигналами (ЧМ) создается путем использования отрезков гармонических сигналов с кратными величине $2\pi/T$ частотами, можно считать, что полоса частот, занимаемая системой, пропорциональна числу позиций. В этом случае выигрыш по полосе согласно (5.39)

$$\eta_{P2ЧМ/5ЧМ}=10\lg\frac{2}{5}=-4\ дБ,$$

а обобщенный энергетический выигрыш согласно (5.40)

$$\eta'_{2ЧМ/5ЧМ}=-0{,}72\ дБ.$$

Полезно заметить, что переход от двухпозиционной к m-позиционной системе ЧМ сопровождается выигрышем по эквивалентному отношению *сигнал/шум* (коэффициент использования мощности передатчика повышается) и проигрышем по занимаемой полосе частот.

Р.5.5.5. Согласно [12] коэффициент использования пропускной способности (5.41)

$$K_с=\frac{\log_2 m}{T_m C}.$$

Величину C можно представить следующим образом:

$$C=F_к\log\left(1+\frac{P_с}{P_ш}\right)=F_к\log\left(1+\frac{2h_0^2}{B}\right),$$

так как $\dfrac{P_с}{P_ш}=\dfrac{P_сT}{G_шF_кT}=\dfrac{2h_0^2}{B}$.

Здесь $B=2F_кT$ — база канальных сигналов.

Теперь для коэффициента использования пропускной способности можно записать

$$K_с = \frac{2\log_2 m}{B\log_2\left(1 + \frac{2h_0^2}{B}\right)}.$$

При заданной скорости передачи информации I'

$$K_с = \frac{I'}{F_к\log_2\left(1 + \frac{h_э^2 I'}{\log_2 m F_к}\right)}.$$

Величина $h^2{}_э$ согласно Р.5.5.3

$$h_э^2 = \frac{m-1}{2\log_2 m}\ln\left(\frac{m-1}{2p_э\log_2 m}\right) = \frac{3}{2\log 4}\ln\frac{3}{2\cdot10^{-4}\log_2 4} = 6{,}69.$$

Теперь находим $K_с$

$$K_с = \frac{300}{3{,}1\cdot10^3\log_2\left(1 + \frac{6{,}69\cdot300}{2\cdot3{,}1\cdot10^3}\right)} = 1{,}33\cdot10^{-1}.$$

Р.5.5.6. Согласно Р.5.5.5

$$K_с = \frac{300}{3{,}1\cdot10^3\log_2\left(1 + \frac{3\cdot300}{2\cdot3{,}1\cdot10^3}\right)} = 2{,}52\cdot10^{-1}.$$

Р.5.5.7. Вероятность того, что в $(n-1)$ ветвях коэффициент передачи канала $\gamma<\gamma_0$, а в одной какой-либо ветви $\gamma\approx\gamma_0$, определится формулой

$$w_1(\gamma_0)\,d\gamma_0 = nw_1(\gamma=\gamma_0)\left[\int_0^{\gamma_0} w_1(\gamma)\,d\gamma\right]^{n-1} d\gamma_0 =$$

$$= \frac{n\gamma_0}{\overline{\gamma^2}}\exp\left(-\frac{\gamma_0^2}{\overline{\gamma^2}}\right)\left[1-\exp\left(-\frac{\gamma_0^2}{\overline{\gamma^2}}\right)\right]^{n-1} d\gamma_0,$$

где $w_1(\gamma) = \frac{2\gamma}{\overline{\gamma^2}}\exp\left(-\frac{\gamma^2}{\overline{\gamma^2}}\right)$ — рэлеевское распределение коэффициента передачи канала (амплитуд).

Плотность вероятности для максимума коэффициента передачи канала $\gamma_{макс}=\gamma_0$ получим, поделив $w(\gamma_0)d\gamma_0$ на $d\gamma_0$:

$$w(\gamma_0) = \frac{n\gamma_0}{\overline{\gamma^2}}\exp\left(-\frac{\gamma_0^2}{\overline{\gamma^2}}\right)\left[1-\exp\left(\frac{\gamma_0^2}{\overline{\gamma^2}}\right)\right]^{n-1}.$$

Для двоичной ЧМ в отсутствие замираний и оптимальном некогерентном приеме вероятность ошибки при $\gamma=\gamma_0$.

$$p_{\text{ош}}(\gamma_0) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}\,\frac{\gamma_0^2 P_{\text{с}} T}{G_{\text{ш}}}\right).$$

Рассматриваемая схема автовыбора эквивалентна схеме одинарного приема, у которой коэффициент передачи меняется в соответствии с найденной статистикой $w_1(\gamma_0)$. Следовательно, средняя вероятность ошибки при n-кратном разнесении

$$p_{\text{ош},n} = \int\limits_0^\infty p(\gamma_0) w(\gamma_0)\, d\gamma_0 = \frac{n}{2\overline{\gamma^2}} \int\limits_0^\infty \gamma_0 \exp \times$$

$$\times\left[-\frac{\gamma_0^2}{\overline{\gamma^2}}\left(1+\frac{\overline{h_0^2}}{2}\right)\right]\left(1-e^{-\frac{\gamma_0^2}{\overline{\gamma^2}}}\right)^{n-1} d\gamma_0,$$

где $\overline{h^2}_0 = \dfrac{\overline{\gamma^2}\, P_{\text{с}} T}{G_{\text{ш}}}$ — отношение средней энергии посылки сигнала в месте приема к спектральной плотности мощности шума.

Используя формулу бинома Ньютона, получаем

$$p_{\text{ош},n} = \frac{n!}{2\prod\limits_{i=1}^{n}\left(i+\dfrac{\overline{h_0^2}}{2}\right)}.$$

Р.5.5.8. В области малых ошибок (при больших $\overline{h^2}_0$) из соотношения для $p_{\text{ош},n}$, полученного в Р.5.5.7, следует

$$p_{\text{ош},1} \approx \frac{1}{\overline{h_1^2}};\ p_{\text{ош},2} \approx \frac{4}{(\overline{h_2^2})^2};\ \overline{h_1^2} \approx \frac{1}{p_{\text{ош},1}};\ \overline{h_2^2} \approx \frac{2}{\sqrt{p_{\text{ош},2}}}.$$

При неизменной вероятности ошибки $p_{\text{ош},1}=p_{\text{ош},2}=p_{\text{ош}}=10^{-4}$ энергетический выигрыш сдвоенного приема по сравнению с одинарным

$$\eta_{P1/2} = 10\lg\frac{\sqrt{p_{\text{ош},2}}}{2p_{\text{ош},1}} = 17\ \text{дБ}.$$

Р.5.5.9. Согласно Р.5.3.4 помехоустойчивость двоичной системы связи с ЧМ при флуктуационной помехе определяется отношением $h^2{}_0=E/G_ш$. Энергия составного сигнала

$$E=\int\limits_0^T\left[\sum_{k=1}^{N}U_m\sin(\omega_k t+\varphi_k)\right]^2 dt=\sum_{k=1}^{N}E_k,$$

где $E_k=\int\limits_0^T U_m^2\sin^2_k(\omega_k t+\varphi_к)\,dt$ — энергия элемента составного сигнала. Поскольку энергии элементарных сигналов одинаковы, можно записать

$$h_0^2=\frac{\sum\limits_{k=1}^{N}E_k}{G_ш}=\frac{E}{G_ш}.$$

Вероятность ошибки, равная в данном случае $p_{ош}=$ $=\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\sqrt{h_0^2}\right)\right]$, не зависит от базы сигнала $2F_кT$.

Коэффициент использования полосы частот $\nu=v/F=$ $=1/FT=2/B$. При $T=20$ мс и $N=2000$ $\tau_0=10^{-4}$, $F_к=$ $=1/\tau_0=10^4$ Гц и $\nu=2\cdot10^{-4}$ бит/Гц. Из этого можно сделать вывод, что широкополосные системы связи с составными сигналами используют полосу частот весьма неэффективно.

Р.5.5.10. Можно считать [24], что при использовании сигналов с большой базой сосредоточенные помехи действуют так же, как флуктуационная помеха со спектральной плотностью, равной $G_{с.п}=\frac{\Sigma P_{с.п}}{F}$, где F — полоса сигнала, $\Sigma P_{с.п}$ — суммарная мощность сосредоточенных помех в полосе сигнала.

Если в канале действуют флуктуационная и сосредоточенные помехи со спектральными плотностями $G_ш$ и $G_{с.п}$, величина $h_0{}^2$ может быть определена

$$h_0^2=\frac{E}{G_ш+G_{с.п}}=\frac{P_cT}{G_ш+\frac{\Sigma P_{с.п}}{F}}.$$

Если $G_ш\ll G_{с.п}$, то $h_0^2\approx\frac{P_c}{\Sigma P_{с.п}}FT$. Этот результат свидетельствует об ослаблении влияния сосредоточенных помех с ростом базы сигнала.

Р.5.5.11. При точно известном коэффициенте передачи канала[1] и неопределенной фазе вероятность ошибки при оптимальном приеме двоичной ЧМ без проверки символов на надежность

$$p_{\text{ош}}(\gamma) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\gamma^2 E}{G_{\text{ш}}}\right).$$

Средняя вероятность ошибки при пороговом способе приема в системе ППСН

$$p_{\text{ош}} = p_{\text{з.о}}(\text{ош}) = \frac{\text{ош,з.о}}{P(\text{з. о})},$$

где P(з.о) — безусловная вероятность попадания анализируемого элемента сигнала в зону определенности (эта вероятность определяется вероятностью выполнения условия $\frac{\gamma^2 E}{G_{\text{ш}}} > R$); $P_{\text{з.о}}$(ош) — вероятность ошибки при попадании элемента сигнала в зону определенности (эта вероятность определяет среднюю вероятность ошибки в рассматриваемой системе); P (ош, з.о) — совместная вероятность попадания элемента сигнала в зону определенности и ошибки.

При случайном изменении γ в ходе замираний сигнала с учетом условия $\frac{\gamma^2 E}{G_{\text{ш}}} > R$ находим

$$P(\text{з.о}) = \int\limits_{\sqrt{\frac{RG_{\text{ш}}}{E}}}^{\infty} w_1(\gamma)\,d\gamma;\quad p\,(\text{ош, з.о}) =$$

$$= \int\limits_{\sqrt{\frac{RG_{\text{ш}}}{E}}}^{\infty} p_{\text{ош}}(\gamma)\,w(\gamma)\,d\gamma = \frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{\frac{RG_{\text{ш}}}{E}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\gamma^2 E}{G_{\text{ш}}}\right) w_1(\gamma)\,d\gamma.$$

С учетом этого для вероятности ошибки получаем

$$p_{\text{ош}} = \frac{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{\sqrt{\frac{RG_{\text{ш}}}{E}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\gamma^2 E}{G_{\text{ш}}}\right) w_1(\gamma)\,d\gamma}{\displaystyle\int\limits_{\sqrt{\frac{RG_{\text{ш}}}{E}}}^{\infty} w_1(\gamma)\,d\gamma}.$$

---

[1] Это допущение справедливо в условиях медленных замираний.

При рэлеевских замираниях $w_1(\gamma) = \frac{2\gamma}{\overline{\gamma^2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{\overline{\gamma^2}}\right)$ ($\overline{\gamma^2}$ — средний квадрат коэффициента передачи) для вероятности ошибки получаем

$$p_{\text{ош}} = \frac{1}{2+\overline{h_0^2}} \exp(-R).$$

Средняя скорость передачи в анализируемой системе (при пренебрежении ошибками в канале) при использовании двоичных посылок длительности T и примитивного кода

$$I' = \frac{P(\text{з. о})}{T} = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{R}{\overline{h_0^2}}\right) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{R}{\overline{\alpha^2}\,T}\right),$$

где $\overline{\alpha^2} = \frac{\overline{h_0^2}}{T} = \frac{\overline{\gamma^2}\,P_{\text{с}}}{G_{\text{ш}}}$.

Из условия $dI'/dT = 0$ находим оптимальное значение длительности посылки T, при котором максимизируется I':

$$T_{\text{опт}} = \frac{R}{\overline{\alpha^2}}.$$

Отсюда $\overline{h^2}_{0\,\text{опт}} = T_{\text{опт}}\overline{\alpha^2} = R$. Если $T = T_{\text{опт}}$, то

$$P(\text{з. о}) = \exp(-1);\quad I' = I'_{\text{макс}} = \frac{1}{T_{\text{опт}}} \exp(-1);$$

$$p_{\text{ош}} = \frac{\exp(-\overline{h_0^2})}{2+\overline{h_0^2}}.$$

Для системы без обратной связи $(R=0)\ p(\text{з.о}) = 1$, $I'_{\text{пс}} = \frac{1}{T_{\text{п.с}}}$; $p_{\text{п.с}} = \frac{1}{2+\overline{h^2_{0\,\text{п.с}}}}$. Фиксируя вероятность ошибки $p_{\text{ош}} = p_{\text{п.с}} = 10^{-4}$, находим энергетический выигрыш перехода от системы без обратной связи к системе ППСН:

$$\eta_P = 10\lg \frac{\overline{h^2_{0\text{п.с}}}}{\overline{h_0^2}} \approx 28{,}9 \text{ дБ}.$$

При одинаковой пиковой мощности передатчика $(\overline{\alpha^2} = \overline{\alpha^2}_{\text{п.с}})$ для обеспечения неизменной вероятности ошибки длительность элемента сигнала должна быть в $\lambda = h^2_{0\text{п.с}}/h^2_0 = 770$ раз короче (т. е. занимаемая полоса частот в λ раз шире, чем в системе без обратной связи). Следовательно, выигрыш в средней скорости передачи информации составит

$$\lambda_{I'} = \frac{I'_{\text{макс}}}{I'_{\text{п.с}}} = \lambda P\,(\text{з. о}) = \frac{\lambda}{e}.$$

При $p_{\text{ош}} = p_{\text{п.с}} = 10^{-4}$ $\lambda_{I'} = 285$.

Нетрудно видеть, что при $I' = I'_{\text{п.с}}$ и $p_{\text{ош}} = p_{\text{п.с}}$ использование обратного канала дает энергетический выигрыш $\eta_P = 10 \lg \lambda_{I'}$ дБ. При $p_{\text{ош}} = p_{\text{п.с}} = 10^{-4}$ $\eta_P = 24{,}5$ дБ.

Если фиксировать длительность посылок (полосу частот), то при неизменной вероятности ошибки в системе с обратной связью можно уменьшить пиковую мощность передатчика. При этом средняя скорость передачи информации уменьшается в

$$\frac{\lambda}{\lambda_{I'}} = \frac{1}{P(\text{з.о})}\ \text{раз.}$$

Р.5.5.12. Выигрыш η_P показывает, во сколько раз может быть уменьшена мощность передатчика при переходе от одного метода передачи к другому при сохранении качества передачи (средней вероятности ошибки $p_{\text{ош}}$).

Средняя вероятность ошибки в двоичной системе манипуляции является однозначной функцией величины h^2_0:

$$p_{\text{ош}} = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\sqrt{kh_0^2}\right)\right] \text{ при когерентном приеме;}$$

$$p_{\text{ош}} = \frac{1}{2}\, e^{-k\frac{h_0^2}{2}} \text{ при некогерентном приеме;}$$

$k = 1$ при ЧМ, $k = 2$ при ФМ (ОФМ), $h^2_0 = \dfrac{P_{\text{c}}T}{G_{\text{ш}}}$; $P_{\text{c}} =$ средняя мощность сигнала в подканале; T — длительность элементарной посылки.

Таким образом, для сохранения качества связи (вевеличины $p_{\text{ош}}$) необходимо поддерживать постоянной величину h^2_0, т. е. $P_{\text{c}}T = \text{const}$.

В последовательной системе вся мощность передатчика P_0 расходуется на один подканал: $P_1 = P_0$, $P_{\text{макс},\,1} = P_0$.

В параллельной системе средняя мощность передатчика распределяется между подканалами $P_2 = \frac{P_0}{I'}$, $P_{\text{макс},2} = P_0/n^\lambda$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$.

В последовательной системе длительность элементарной посылки $T_1 = \frac{1}{I'}$ (I' — скорость передачи информации).

В параллельной системе

$$T_2 = \frac{n}{T} = nT_1.$$

Следовательно, $P_1T_1 = \frac{P_0}{I'}$, $P_2T_2 = \frac{P_0}{I'}$, т. е. при сохранении средней мощности передатчика (случай «а») выигрыш отсутствует $(\eta_P = 1)$.

При фиксированной же пиковой мощности передатчика (случай «б»)

$$P_1T_1 = \frac{P_{\text{макс},1}}{I'}, \quad P_2T_2 = \frac{P_{\text{макс},1}}{I'n^\lambda}$$

и выигрыш

$$\eta_P = \frac{P_{\text{макс},1}T_1}{P_{\text{макс},2}T_2} = n^{\lambda-1}.$$

Р.5.5.13. В параллельной системе $T_1 = n/I' = 10$ мс

$$p_{\text{ош},1} \approx \frac{T_1^2}{4\beta^2} e^{-q^2} = \frac{1}{4} 10^{-2} e^{-5}.$$

В последовательной системе $T_2 = 1/I' = 0{,}833$ мс

$$p_{\text{ош},2} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-2} (1200)^2} e^{-5}.$$

Выигрыш по вероятности ошибок

$$\alpha = \frac{p_{\text{ош},1}}{p_{\text{ош},2}} = \frac{T_1^2}{T_2^2} = n^2 = 144.$$

Р.5.5.14. Распределение коэффициента передачи канала в одном луче

$$w(\gamma_1) = \frac{2\gamma_1}{\overline{\gamma_1^2}} \exp\left(-\frac{\gamma_1^2}{\overline{\gamma_1^2}}\right).$$

При когерентном приеме по одному лучу

$$p_{\text{ош}} = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\sqrt{2\frac{P_{\text{c}} T \gamma_1^2}{G_{\text{ш}}}}\right)\right],$$

где P_{c} — мощность посылки; $G_{\text{ш}}$ — спектральная плотность мощности шума.

После усреднения полученного выражения по γ_1 с учетом выражения для $w(\gamma_1)$ при больших $\overline{h^2}_1$ имеем [13]

$$p \approx 1/4\overline{h_1^2}.$$

При приеме по обоим лучам, если передача ведется по n параллельным каналам,

$$T_1 = n/I' = 20/1200 \approx 16 \text{ мс}, \; T_{\text{a}1} = T_1 - \Delta t = 14 \text{ мс},$$

и оба луча на протяжении $T_{\text{a}1}$ сливаются в один также с рэлеевским распределением коэффициента передачи, но с вдвое бóльшим средним квадратом:

$$w(\gamma) = \frac{\gamma_1}{\overline{\gamma_1^2}} \exp\left(-\frac{\gamma_1^2}{2\overline{\gamma_1^2}}\right).$$

При этом $p_{\text{ош}} \approx \frac{1}{8\overline{h_1^2}}$.

Если передача ведется последовательным методом по одному каналу, $T_2 = 1/I' = 1/1200 = 0{,}833$ мс, $T_{\text{a}2} = T_2 + \Delta t = 2{,}833$ мс, оба луча не сливаются в один, а дополняют друг друга.

При больших h^2_1 при этом $p_{\text{ош}} \approx \frac{3}{16\left(\overline{h_1^2}\right)^2}$ [13]. Таким образом, для параллельной системы $\overline{h^2}_1 \approx \frac{1}{8p_{\text{ош}}}$; для последовательной $\overline{h^2}_1 \approx \sqrt{\frac{3}{16p_{\text{ош}}}}$.

Выигрыш перехода от параллельных систем к последовательным

$$\eta_p = \left(\frac{1}{8p_{\text{ош}}}\right) : \left(\sqrt{\frac{3}{16p_{\text{ош}}}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3p_{\text{ош}}}}.$$

Глава 6

ПЕРЕДАЧА НЕПРЕРЫВНЫХ СООБЩЕНИЙ

6.1. Оптимальная оценка отдельных параметров сигнала

Задача оптимальной оценки (измерения) параметра сигнала состоит в определении некоторым наилучшим образом значения параметра b по принятой смеси сигнала $s'(b, t)$, зависящего от этого параметра, и аддитивного шума $U(t)$:

$$z(t) = s'(b;\ t) + u(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Из-за наличия шума в канале и конечного интервала анализа оценка параметра b^* отличается от истинного значения параметра b, причем ошибка $\varepsilon = b^* - b$ имеет случайный характер. Качество оценки проверяется обычно на выполнение условий состоятельности, несмещенности и эффективности. Если среднее значение ошибки равно нулю (это означает, что среднее значение оценки равно истинному значению параметра), оценка называется несмещенной:

$$M[\mathrm{E}] = \overline{b^* - b} = 0 \text{ или } \overline{b^*} = b. \tag{6.1}$$

Оценка называется эффективной, если дисперсия ошибки минимальна в классе всех возможных оценок:

$$D[\mathrm{E}] = \overline{(\mathrm{E} - \overline{\mathrm{E}})^2} = \min. \tag{6.2}$$

Оценка b^* называется состоятельной, если при увеличении интервала анализа T она сходится по вероятности к оцениваемому параметру

$$\lim_{T\to\infty} P(\,|\,b^* - b\,|\, \geqslant \varepsilon) = 0, \tag{6.3}$$

при этом $\lim\limits_{T\to\infty} D[E] = 0$.

Для нахождения оценок широко применяется критерий максимального правдоподобия, в соответствии с которым в качестве оценки параметра принимается такое его значение b^*, которое максимизирует функцию отношения правдоподобия $l(z/s(b))$, т. е. b^* определяется из условия

$$\frac{\partial l\,(z/s\,(b))}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left[\frac{w(z/s(b))}{w(u)}\right] = 0. \tag{6.4}$$

Полученная таким способом оценка называется максимально правдоподобной. Часто уравнение, определяющее максимально правдоподобную оценку (уравнение правдоподобия), записывают в виде

$$\frac{\partial\ [\ln l\,(z/s\,(b)]}{\partial b}. \tag{6.5}$$

Если существует несмещенная эффективная оценка максимального правдоподобия, то, как правило, уравнение правдоподобия имеет единственное решение, а полученная оценка состоятельна и асимптотически (при стремлении времени анализа T или объема выборки к бесконечности или же при ограниченном T, при стремлении отношения *сигнал/шум* к бесконечности) эффективна и распределена нормально.

Задачи

6.1.1. Принимаемый сигнал можно представить в виде

$$s'(\gamma,\ t) = \gamma s(t,\ \theta),$$

где γ — коэффициент передачи канала; θ — фазовый сдвиг.

Найти максимально правдоподобную оценку коэффициента передачи канала, полагая, что сигнал $s(t,\ \theta)$ точно известен в месте приема, а в канале действует нормальный белый шум со спектральной плотностью мощности $G_{\text{ш}}$. Составить структурную схему оптимального измерителя. Найти распределение ошибки измерения, ее среднее значение и дисперсию.

6.1.2. Найти максимально правдоподобную оценку коэффициента передачи канала из задачи 6.1.1 при неопределенной фазе θ и составить структурную схему для оптимального измерителя.

6.1.3. Показать, что при больших отношениях *сигнал/шум* максимально правдоподобная оценка амплитуды сигнала при неопределенной фазе является состоятельной, несмещенной, асимптотически эффективной, а ее качество такое же, как при определенной фазе сигнала.

6.1.4. Показать, что максимально правдоподобная оценка фазы сигнала φ в канале с флуктуационным белым шумом определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\varphi^* = \frac{\int\limits_0^T z(t)\,\hat{s}(t)\,dt}{\int\limits_0^T z(t)\,s(t)\,dt}.$$

Составить схему оптимального измерителя. В области больших отношений *сигнал/шум* найти распределение для φ^*, среднее значение и дисперсию этой величины.

6.1.5. На вход приемника в пределах интервала анализа $(0,\ T)$ поступают смесь нормального белого шума с энергетическим спектром $G_ш$ и сигнал в виде радиоимпульса $s'(t)=a(t-\tau)\cos(\omega t+\varphi)h(t-\tau)$ (рис. 6.1) с известной огибающей $a(t-\tau)$, частотой ω, длительностью $\tau_и$, случайным временем прихода τ и случайной фазой φ

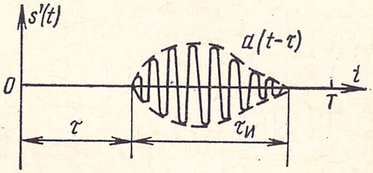


Рис. 6.1. К определению оптимальной оценки времени прихода сигнала

$$h(x)=\begin{cases}1 \text{ при } 0\leqslant x\leqslant\tau_и,\\ 0 \text{ при } \tau_и<x;\ x<0.\end{cases}$$

Найти оптимальную по критерию максимума апостериорной вероятности оценку времени прихода сигнала τ^*, полагая, что этот параметр равномерно распределен на интервале $(0, T)$, а случайная фаза φ не зависит от τ и равномерно распределена на интервале $(-\pi, \pi)$.

При большом отношении *сигнал/шум* найти распределение апостериорной вероятности оцениваемого параметра, среднее значение и дисперсию оценки.

6.1.6. На вход приемника в пределах интервала анализа $(0, T)$ поступают смесь нормального белого шума и сигнала в виде прямоугольного радиоимпульса (см. задачу 6.1.5) с $\tau_и=T$ и известным временем прихода $\tau=0$ со случайной равномерно распределенной фазой φ, известной амплитудой γ и случайной частотой ω. Найти оптимальную по критерию максимума апостериорной вероятности оценку частоты $f=\omega/2\pi$, полагая, что этот параметр имеет равномерное распределение в пределах интервала $(f_{мин}, f_{макс})$. Параметры φ и ω считать независимыми. Наметить структурную схему оптимального измерителя частоты. В условиях большого отношения *сигнал/шум* $f-f_0<1/T$, $f_0T\gg1$ (f_0 — истинное значение частоты принимаемого сигнала) найти распределение апостериорной вероятности оцениваемой частоты сигнала, среднее значение и дисперсию оценки.

Решения и ответы

Р.6.1.1. При нормальном белом шуме функционал отношения правдоподобия определяется соотношением

$$l(z/\gamma) = \exp\left[\frac{2\gamma}{G_{\text{ш}}}\int_0^T z(t)\,s(t,\theta)\,dt - \frac{\gamma^2 E}{G_{\text{ш}}}\right],$$

где $E = \int_0^T s^2(t,\theta)\,dt$ — энергия сигнала. Уравнение правдоподобия (6.5) в этом случае выглядит так:

$$\frac{\partial\,[\ln l(z/\gamma)]}{\partial\gamma} = \frac{2}{G_{\text{ш}}}\int_0^T z(t)\,s(t,\theta)\,dt - \frac{2\gamma E}{G_{\text{ш}}} = 0.$$

Решением уравнения будет величина

$$\gamma^* = \frac{1}{E}\int_0^T z(t)\,s(t,\theta)\,dt,$$

которая и представляет собой максимально правдоподобную оценку коэффициента передачи канала при точно известном сигнале.

Оптимальный измеритель реализуется согласованным фильтром или коррелятором (рис. 6.2).

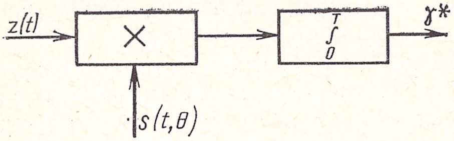


Рис. 6.2. Структурная схема оптимального измерителя коэффициента передачи канала при точно известном сигнале

Так как $z(t) = \gamma s(t,\theta) + u(t)$, имеем

$$\gamma^* = \frac{1}{E}\int_0^T \gamma\, s(t,\theta)\,s(t,\theta)\,dt + \frac{1}{E}\int_0^T u(t)\,s(t,\theta)\,dt =$$

$$= \gamma + \frac{1}{E}\int_0^T u(t)\,s(t,\theta)\,dt.$$

Следовательно, ошибка измерения

$$\varepsilon = \gamma^* - \gamma = \frac{1}{E}\int_0^T u(t)\,s(t,\theta)\,dt.$$

При нормальном шуме с нулевым математическим ожиданием и спектральной плотностью мощности $G_{\text{ш}}$ ошибка распределена нормально, имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию [12]

$$D[\mathrm{E}] = \frac{G_{\text{ш}}}{2E}\,.$$

Следовательно, полученная оценка является несмещенной ($M[\mathrm{E}] = 0$), состоятельной ($D[\mathrm{E}] = \frac{G_{\text{ш}}}{2E} \to 0$ при $T \to \infty$, $E \to \infty$). Поскольку при $T \to \infty$ $D[\mathrm{E}] \to 0$, оценка коэффициента передачи канала является асимптотически эффективной, так как значение дисперсии ошибки, равное нулю, является минимально возможным.

Р.6.1.2. При неопределенной фазе сигнала функционал отношения правдоподобия с учетом Р.2.1.13

$$l\,(z/\gamma = \exp\left(-\frac{\gamma^2 E}{G_{\text{ш}}}\right) I_0\left(\frac{2\gamma V}{G_{\text{ш}}}\right),$$

где $V = \sqrt{\left[\int\limits_0^T z\,(t)\,s\,(t)\,dt\right]^2 + \left[\int\limits_0^T z\,(t)\,\hat{s}\,(t)\,dt\right]^3}.$

Составим уравнение правдоподобия по (6.4)

$$\frac{\partial l\,(z/\gamma)}{\partial\,\gamma} = \left[-\frac{2\gamma E}{G_{\text{ш}}} I_0\left(\frac{2\gamma V}{G}\right) + \frac{2V}{G_{\text{ш}}} I_1\left(\frac{2\gamma V}{G_{\text{ш}}}\right)\right] \exp\left(-\frac{\gamma^2 E}{G_{\text{ш}}}\right) = 0,$$

так как

$$\frac{\partial I_0\,(x)}{\partial x} = I_1\,(x).$$

Отсюда

$$\gamma^* = \frac{V}{E}\;\frac{I_1\left(\frac{2\gamma^* V}{G_{\text{ш}}}\right)}{I_0\left(\frac{2\gamma^* V}{G_{\text{ш}}}\right)}.$$

Структурная схема измерителя дана на рис. 6.3. Она содержит согласованный фильтр, детектор огибающей, блоки, выполняющие операции умножения и деления, нелинейные операции $y_1 = I_1(x)$, $y_2 = I_0(x)$, вычитания. Оптимальная оценка амплитуды соответствует тому значению множителя γ^*, при котором на выходе вычитающего устройства достигается нулевое значение напряжения.

Р.6.1.3. Согласно Р.6.1.2 максимально правдоподобная оценка коэффициента передачи канала при неопределенной фазе сигнала

$$\gamma^* = \frac{V}{E} \frac{I_1\left(\frac{2\gamma^* V}{G_{\text{ш}}}\right)}{I_0\left(\frac{2\gamma^* V}{G_{\text{ш}}}\right)}.$$

Величина $\frac{I_1(x)}{I_0(x)}$ меняется от 0 до 1 при изменении аргумента x от 0 до ∞.

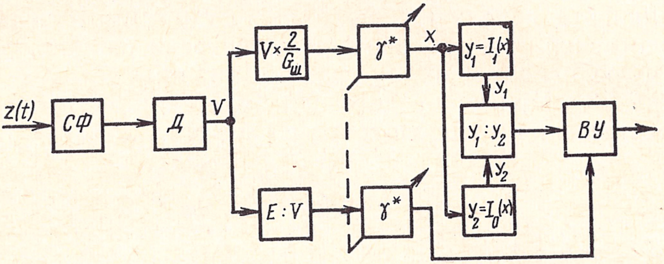


Рис. 6.3. Структурная схема оптимального измерителя коэффициента передачи канала при неопределенной фазе сигнала

При $\frac{2\gamma^* V}{G_{\text{ш}}} \gg 1$, что соответствует большим отношениям *сигнал/шум*, можно принять $I_1(x) \approx I_0(x)$ и

$$\gamma^* = \frac{V}{E}\,^{1}.$$

Огибающая V смеси сигнала и нормального шума распределена по обобщенному закону Рэлея (см. Р.1.2.16)

$$w(V) = \frac{2V}{EG_{\text{ш}}} \exp\left(-\frac{V^2 + \gamma^2 E^2}{EG_{\text{ш}}}\right) I_0\left(\frac{2\gamma V}{G_{\text{ш}}}\right).$$

При больших отношениях *сигнал/шум* ($\frac{\gamma^2 E}{G_{\text{ш}}} \gg 1$) обобщенное распределение Рэлея удовлетворительно аппроксимируется нормальным законом [15]

$$w(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{EG_{\text{ш}}}{2}}} \exp\left[-\frac{(V-\gamma E)^2}{EG_{\text{ш}}}\right].$$

---

[1] Обратим внимание на то, что в этом случае оптимальный измеритель амплитуды содержит только согласованный фильтр и детектор огибающей.

Следовательно, и γ^* будет иметь нормальное распределение, так как величины γ^* и V отличаются только масштабом. Согласно Р.2.4.9 можем записать

$$w(\gamma^*) = w\left(\frac{V}{E}\right)E = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{G_{ш}}{2E}}}\exp\left[-\frac{(\gamma^*-\gamma)^2}{2\frac{G_{ш}}{2E}}\right].$$

Параметрами этого распределения являются

$$\overline{\gamma^*} = \gamma, \; D[\gamma^*] = \frac{G_{ш}}{2E}.$$

Эти параметры не отличаются от аналогичных параметров, полученных при точно известной фазе сигнала (но при произвольном отношении *сигнал/шум*).

Р.6.1.4. При неопределенной фазе сигнала функционал отношения правдоподобия можно записать в виде

$$l(z/\varphi) = \exp\left\{\frac{2\gamma}{G_{ш}}\left[\cos\varphi\int_0^T z(t)\,s(t)dt - \sin\varphi\int_0^T z(t)\,\hat{s}(t)\,dt\right] - \frac{\gamma^2 E}{G_{ш}}\right\},$$

поскольку принимаемый сигнал $s'(t) = \gamma\cos\varphi s(t) - \gamma\sin\varphi\hat{s}(t)$. Составим уравнение правдоподобия

$$\frac{\partial\{\ln l(z/\varphi)\}}{\partial\varphi} = 0.$$

После дифференцирования получаем

$$-\frac{2\gamma}{G_{ш}}\sin\varphi^*\int_0^T z(t)\,s(t)\,dt = \frac{2\gamma}{G_{ш}}\cos\varphi^*\int_0^T z(t)\,\hat{s}(t)\,dt,$$

или

$$\mathrm{tg}^* = -\frac{y_1}{y_2},$$

где

$$y_1 = \int_0^T z(t)\,\hat{s}(t)\,dt; \; y_2 = \int_0^T z(t)\,s(t)\,dt.$$

Легко видеть, что $y_1 = -\gamma\sin\varphi E + \hat{\Lambda}_1$; $y_2 = \gamma\cos\varphi E + \Lambda_1$; φ — истинное значение фазы;

$$\Lambda_1 = \int_0^T u(t)\,s(t)\,dt; \quad \hat{\Lambda}_1 = \int_0^T u(t)\,\hat{s}(t)\,dt;$$

$$\operatorname{tg}\varphi^* = \frac{\gamma \sin\varphi\, E - \hat{\Lambda}_1}{\gamma\cos\varphi\, E + \Lambda_1} = \operatorname{tg}\varphi\,\frac{\left(1 - \dfrac{\hat{\Lambda}_1}{\gamma E \sin\varphi}\right)}{\left(1 + \dfrac{\Lambda_1}{\gamma E\cos\varphi}\right)}.$$

В области больших отношений *сигнал/шум*, исключая пока из рассмотрения значения $\varphi = k\frac{\pi}{2}$ ($k=0$, 1, 2, ...), можно написать

$$\operatorname{tg}\varphi^* = \operatorname{tg}\varphi\left(1 - \frac{\hat{\Lambda}_1}{\gamma E\sin\varphi} - \frac{\Lambda_1}{\gamma E\cos\varphi}\right) = \operatorname{tg}\varphi - \frac{\varepsilon}{\cos^2\varphi},$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma E}(\hat{\Lambda}_1\cos\varphi + \Lambda_1\sin\varphi);$$

$\operatorname{tg}\varphi - \frac{\varepsilon}{\cos^2\varphi}$ можно считать первыми двумя членами разложения в ряд Тейлора функции $\operatorname{tg}(\varphi^* = \varphi - \varepsilon)$ по малым приращениям ε. Таким образом, в области больших отношений *сигнал/шум* $\varphi^* \approx \varphi - \varepsilon$ [1]. Случайная величина ε имеет нормальное распределение с нулевым средним значением и дисперсией $\overline{\varepsilon^2} = \frac{G_\text{ш}}{2\gamma^2 E}$. Это означает, что полученная оценка несмещенная, состоятельна и асимптотически эффективна.

Р.6.1.5. При равномерном распределении оцениваемого параметра алгоритм оценки, максимизирующий апостериорную вероятность, не отличается от алгоритма, полученного по критерию максимального правдоподобия. Функционал отношения правдоподобия

$$l\,[z(t)/\varphi,\ \tau] = \exp\left[\frac{2\gamma}{G_\text{ш}}\int\limits_{\tau}^{\tau+\tau_\text{и}} z(t)\,a\,t - \tau)\cos(\omega t + \varphi)dt - \frac{\gamma^2 E}{G_\text{ш}}\right].$$

Усредняя по фазе φ, которая считается распределенной равномерно, получаем для функционала отношения правдоподобия

$$l\,[z(t)/\tau] = KI_0\left(\frac{2V(\tau)}{G_\text{ш}}\right),$$

---

[1] Этот результат справедлив и для углов $\varphi = k\frac{\pi}{2}$.

где $K = \exp\left(-\frac{\gamma^2 E}{G_ш}\right)$, $V(\tau) = \gamma \sqrt{\left[\int\limits_{\tau}^{\tau+\tau_и} z(t)\,a(t-\tau) \times \cos\omega t\,dt\right]^2 + \left[\int\limits_{\tau}^{\tau+\tau_и} z(t)\,a(t-\tau)\sin\omega t\,dt\right]^2}$. Величина $V(\tau)$ пропорциональна значению огибающей напряжения на выходе фильтра, согласованного с сигналом, в момент $t=\tau+\tau_и$, т. е. в момент окончания импульса сигнала на входе фильтра. Но к моменту окончания сигнала на входе оптимального фильтра напряжение на его выходе (при времени задержки $t_0 = \tau_и$) достигает максимума.

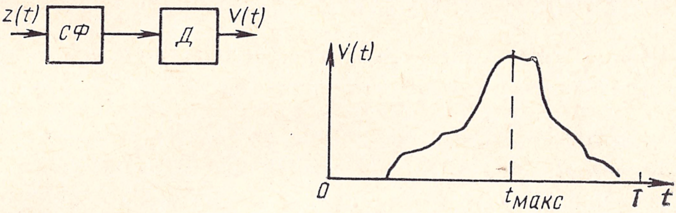


Рис. 6.4. Оптимальный измеритель времени прихода сигнала с неопределенной фазой

Поскольку $I_0(x)$ — монотонная функция от x, то при изменениях τ максимум $l[z(t)/\tau]$ совпадает с максимумом $V(\tau)$. Следовательно, оптимальная оценка времени прихода τ определяется моментом времени, при котором на выходе детектора, подключенного к согласованному фильтру, напряжение достигает максимума (рис. 6.4). Если этот максимум достигает в момент времени $t_{макс}$, то $\tau^* = t_{макс} - \tau_и$. Апостериорная вероятность параметра τ при неопределенной фазе

$$P_z(\tau) = K_1 I_0\left[\frac{2V(\tau)}{G_ш}\right]$$

(K_1 определяется из условия нормировки).

При больших отношениях *сигнал/шум* $V(\tau)$ велико и можно воспользоваться асимптотикой для $I_0(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$ [27]. Поскольку при изменениях τ показатель экспоненты $\exp\left[\frac{2V(\tau)}{G_ш}\right]$ меняется несравненно быстрее, чем выражение, стоящее в знаменателе, то можно написать

$$P_z(\tau) = K_2 \exp\left[\frac{2V(\tau)}{G_{\text{ш}}}\right]$$

(K_2 определяется из условий нормировки). $V(\tau)$ является огибающей по φ-функции

$$\xi(\tau, \varphi) = \int\limits_{\tau}^{\tau+\tau_{\text{и}}} z(t)\, a(t-\tau) \cos(\omega t + \varphi)\, dt,$$

где $z(t) = a(t-\tau_0)\cos(\omega t + \varphi_0)\, h(t-\tau) + u(t)$ (τ_0, φ_0 — истинные значения параметров τ и φ сигнала на входе измерителя). В области больших отношений *сигнал/шум* можно при определении функции $\xi(\tau, \varphi)$ пренебречь шумовым слагаемым в $z(t)$:

$$\xi(\tau, \varphi) = \int\limits_{\tau}^{\tau+\tau_{\text{и}}} a(t-\tau)a(t-\tau_0)\cos(\omega t-\varphi)\cos(\omega t-\varphi_0)h(t-\tau)\, dt.$$

На практике обычно выполняется условие $\omega\tau_{\text{и}} \gg 1$. Но тогда можно в $\xi(\tau, \varphi)$ положить $\varphi_0 = 0$ и привести эту функцию к виду

$$\xi(\tau, \varphi) = \left[\frac{1}{2}\int\limits_{\tau}^{\tau+\tau_{\text{и}}} a(t-\tau_0)\, a(t-\tau)\, dt\right]\cos\varphi.$$

Следовательно, огибающая по φ

$$V(\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_{\tau}^{\tau+\tau_{\text{и}}} a(t-\tau_0)a(t-\tau)\, dt.$$

При большом отношении *сигнал/шум* погрешность измерения τ мала, $P_z(\tau)$ имеет существенное значение лишь в области, где τ близко к τ_0, т. е. при малых значениях разности $\Delta\tau = \tau - \tau_0$. Поэтому можно воспользоваться тремя первыми членами разложения в ряд Тейлора: $a(t-\tau) = a(t-\tau_0) + a'(t-\tau_0)\Delta\tau + \frac{1}{2}a(t-\tau_0)\Delta\tau^2$. Подставив $a(t-\tau)$ под знак интеграла и выполнив интегрирование по частям, получим [7]:

$$V(\tau) = E - \frac{(\Delta\tau)^2}{4}\int\limits_{\tau}^{\tau+\tau_{\text{и}}} [a'(t-\tau)]^2\, dt;$$

$$P_z(\tau)=K_2\exp\left[-\frac{(\tau-\tau_0)^2}{2\beta^2}\right],\quad \beta^2=\frac{G_{\text{ш}}}{\int\limits_{\tau}^{\tau+\tau_{\text{и}}}\left[\frac{\partial a(t-\tau)}{\partial\tau}\right]^2 dt}.$$

Условие нормировки дает $K_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^2}}$. Более правильный результат для апостериорной вероятности

$$P_z(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^2}}\exp\left[-\frac{(\tau-\tau_{\text{н}})^2}{2\beta^2}\right],$$

где $\tau_{\text{н}}$ — наивероятнейшее значение τ [соответствующее максимуму кривой $P_z(\tau)$]. Его можно получить, если не пренебречь шумовой компонентой $u(t)$ в $z(t)$ при вычислении $\xi(\tau,\varphi)$, как это сделано выше.

Из полученного результата следует, что при больших отношениях *сигнал/шум* оценка времени прихода τ несмещенная ($M(\tau)=\tau_{\text{н}}$), а дисперсия ошибки

$$D(\tau)=\beta^2=\frac{G_{\text{ш}}}{\int\limits_{\tau}^{\tau+\tau_{\text{и}}}\left(\frac{\partial a(t-\tau)}{\partial\tau}\right)^2 dt}=\frac{G_{\text{ш}}}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega^2 S^2(f)df},$$

где $S(f)$ — модуль комплексного спектра огибающей. Энергия сигнала $E=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}a^2(t)\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}S^2(f)\,df$, поэтому

$$D[\tau]=\frac{G_{\text{ш}}}{2E\nu^2},\ \text{где}\ \nu^2=\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega^2S^2(f)\,df}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}S^2(f)\,df}.$$

Очевидно, $\lim\limits_{T\to\infty\ (E\to\infty)}D[\tau]=0$ и, следовательно, полученная оценка является состоятельной и асимптотически эффективной.

Р.6.1.6. Апостериорная вероятность частоты сигнала определяется формулой (см. Р.6.1.5)

$$P_z(f)=K_1I_0\left[\frac{2V(f)}{G_{\text{ш}}}\right],$$

где $V(f)=\gamma\sqrt{\left(\int\limits_0^T z(t)\cos\omega\, tdt\right)^2+\left(\int\limits_0^T z(t)\sin\omega\, td\right)^2}$ — это огибающая по φ колебания

$$\xi(f,\ \varphi) = \int\limits_0^T z(t)\, \gamma \cos(\omega t + \varphi)\, dt.$$

Величина $V(f)$ для каждого значения частоты f пропорциональна значению огибающей (в момент $t=T$) колебания на выходе фильтра, согласованного с прямоугольным радиоимпульсом $s(t)=\gamma\cos(\omega t+\varphi)$ с точностью до фазы φ. Так как структура согласованного фильтра зависит от частоты $f=\omega/2\pi$ сигнала, то, строго говоря, для оптимальной оценки частоты [т. е. выбора величины f, которая соответствует максимуму $V(f)$] следовало бы располагать бесконечным набором таких фильтров для области частот от $f_{\text{мин}}$ до $f_{\text{макс}}$ [1].

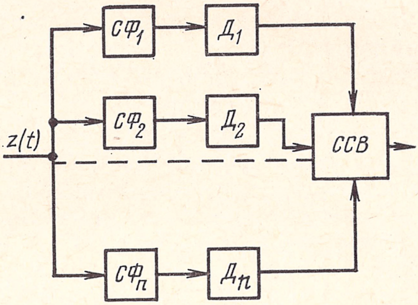


Рис. 6.5. Структурная схема оптимального измерителя частоты при неопределенной фазе сигнала

На практике вместо бесконечного набора фильтров можно использовать $n=f_{\text{макс}}-f_{\text{мин}}/\Delta f$ фильтров, где Δf — величина, меньшая ширины основной части спектра сигнала. По n точкам функции $P_z(f_k)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ можно более или менее точно построить непрерывную (по f) кривую $P_z(f)$. Структурная схема n-канального измерителя частоты показана на рис. 6.5.

В области больших отношений *сигнал/шум* апостериорную вероятность (см. Р.6.1.5) можно определить так: $P_z(f) = K_2 \exp\left[-\dfrac{2V(f)}{G_{\text{ш}}}\right]$. При большом отношении

---

[1] Если реализация $z(t)$ может быть записана и сохранена на долгое время, то вместо набора фильтров можно использовать один фильтр с перестраиваемой средней частотой f полосы пропускания.

сигнал/шум можно при нахождении $V(f)$ также считать $z(t)=\gamma\cos\omega_0 t$[1], ω_0 — истинное значение частоты сигнала. Тогда

$$\xi(f,\ \varphi)=\gamma^2\int_0^T\cos\omega_0 t\cos(\omega t+\varphi)\,dt=\cos\varphi\int_0^T\gamma^2\cos\omega t\cos\times$$

$$\times\,\omega_0\,dt-\sin\varphi\int_0^T\gamma^2\cos\omega_0 t\sin\omega t\,dt$$ и огибающая $V(f)=$

$$=\sqrt{\left(\int_0^T\gamma^2\cos\omega_0 t\cos\omega t\,dt\right)+\left(\int_0^T\gamma^2\cos\omega_0 t\sin\omega t\,dt\right)^2}.$$

При невыполнении условий $(f-f_0)T<1$ и $f_0T\gg1$, учитывая приближения $\cos\Delta\omega t\approx1-\frac{(\Delta\omega t)^2}{2}$, $\sin\Delta\omega t\approx\Delta\omega t$, получим [7]

$$V(f)=E-\frac{b}{2}(\omega-\omega_0)^2,\ \text{где}\ \ b=\frac{ET^2}{12}.$$

Апостериорная вероятность

$$P_z(f)=K_3\exp\left(-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{G_ш}\,\frac{ET^2}{12}\right).$$

Из полученного результата следует, что при больших отношениях *сигнал/шум* оптимальная оценка частоты несмещенная ($M[f]=f_0$), а ее дисперсия $D[f]=\frac{6G_ш}{ET^2}$. Полученная оценка состоятельна ($\lim\limits_{T\to\infty}D[f]=0$) и асимптотически эффективна.

6.2. Оптимальный прием непрерывных сообщений. Выигрыш и обобщенный выигрыш модема. Потенциальная помехоустойчивость при различных видах модуляции несущей непрерывным сообщением

При передаче непрерывных сообщений принимаемое колебание $z(t)$ на интервале $(0,\ T)$ представляет собой аддитивную смесь сигнала известной формы $s'[b(t),\ t]$, зависящего от одного меняющегося во времени параметра $b(t)$ (сообщения), и аддитивного шума $u(t)$:

---

[1] Без потери общности можно считать, что истинное значение фазы $\varphi_0=0$.

$$z(t) = s'[b(t),\ t] + u(t).$$

По принятому колебанию $z(t)$ необходимо наилучшим образом решить, какая реализация сигнала $b(t)$ передавалась, т. е. в этом случае так же можно ставить вопрос об оптимальной в определенном смысле оценке $b^*(t)$. Оптимальный прием меняющегося во времени параметра (непрерывного сообщения) можно свести к задаче совместного оптимального приема многих параметров.

Если представить сигнал $b(t)$ на интервале T обобщенным рядом Фурье

$$b(t) = \sum_{k=1}^{B_\text{с}} \lambda_k \varphi_k(t) \tag{6.6}$$

(здесь $\{\varphi_k(t)\}$ — система ортонормированных функций; λ_k — координаты (параметры) непрерывного сообщения $b(t)$, $B_\text{с}$ — база сообщения), то принимаемое колебание

$$z(t) = s'(\vec{\lambda},\ t) + u(t),$$

где $\vec{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{B\ \text{с}}\}$ — вектор параметров сообщения $b(t)$.

Совместные максимально правдоподобные оценки координат сообщения определяются из условия

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_k}\{l(z/\vec{\lambda})\} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_k}\{\ln l(z/\vec{\lambda})\} = 0, \tag{6.7}$$

где $l(z/\vec{\lambda})$ — функционал отношения правдоподобия. При флуктуационном белом шуме и известной форме сигнала $s'(\vec{\lambda},\ t)$

$$l(z/\vec{\lambda}) = \exp\left[\frac{2}{G_\text{ш}}\int_0^T z(t)\, s'(\vec{\lambda},\ t)\, dt - \frac{1}{G_\text{ш}}\int_0^T s'^2(\vec{\lambda}, t) dt\right]. \tag{6.8}$$

Зная оценки параметров λ_k^*, можно найти оценку сообщения

$$b^*(t) = \sum_{k=1}^{B_\text{с}} \lambda_k^* \varphi_k(t). \tag{6.9}$$

Ошибка $\varepsilon = b^*(t) - b(t)$ может рассматриваться как помеха (шум) на выходе приемника (детектора).

Спектральная плотность мощности шума на выходе детектора при оптимальном приеме и больших отношениях *сигнал/шум* в канале определяется формулой

$$G_\text{вых}(f) = \frac{G_\text{ш}}{\widetilde{\left[\dfrac{\partial}{\partial \lambda_k}\{s'[b(t),\ t]\}\right]^2}}, \tag{6.10}$$

где λ_k — координаты разложения $b(t)$ в обычный ряд Фурье.

Качество непрерывных систем связи часто оценивают выигрышем модема в отношении *сигнал/шум*

$$g = \frac{h^2_{\text{вых}}}{h^2_{\text{вх}}}. \tag{6.11}$$

Здесь $h^2_{\text{вх}} = (P_{\text{с}}/P_{\text{ш}})_{\text{вх}}$ — отношение средних мощностей сигнала и шума на входе приемника;

$$h^2_{\text{вых}} = \frac{\widetilde{b^2(t)}}{\int\limits_0^{F_{\text{с}}} G(f)_{\text{вых}} df}$$

— отношение средних мощностей сигнала и шума на выходе приемника (детектора). Величину $h^2_{\text{вых}}$ удобно выразить через пикфактор сообщения $\Pi = \frac{|b(t)|_{\text{макс}}}{\sqrt{\widetilde{b^2(t)}}}$. При $|b(t)|_{\text{макс}} = 1$ [1]

$$h^2_{\text{вых}} = \frac{1}{\Pi^2 \int\limits_0^{F_{\text{с}}} G(f)_{\text{вых}} df}. \tag{6.12}$$

Очень часто качество непрерывных систем связи оценивают обобщенным выигрышем

$$g' = \frac{h^2_{\text{вых}}}{h^2_{\text{вх}}} \frac{F_{\text{с}}}{F_{\text{к}}} = g \frac{F_{\text{с}}}{F_{\text{к}}}, \tag{6.13}$$

где $F_{\text{с}}$ — полоса сообщения $b(t)$; $F_{\text{к}}$ — полоса канального сигнала $s[b(t), t]$.

Обобщенный выигрыш систем с двойной модуляцией (при условии, что на второй ступени используется прямая модуляция) [2] может быть найден как произведение обобщенных выигрышей

$$g' = g'_{\text{н}} g'_{\text{п.н}}, \tag{6.14}$$

где $g'_{\text{н}}$ — обобщенный выигрыш при демодуляции несущего колебания; $g'_{\text{п.н}}$ — обобщенный выигрыш при демодуляции поднесущего колебания.

В широкополосных системах модуляции при некотором пороговом отношении *сигнал/шум* на входе приемника $h^2_{\text{пор}}$ качество связи резко падает (пороговый эффект). Пороговый эффект выражен тем резче, чем больше частотная избыточность сигнала, определяемая отношением ширины полосы канального сигнала и сообщения $k_F = F_{\text{к}}/F_{\text{с}}$.

---

[1] В дальнейшем везде сообщение будем считать нормированным.

[2] Прямыми называются системы модуляции, в которых модулированный сигнал $s'[b(t), t]$ в момент времени t зависит от значений сообщения в тот же момент времени. Остальные системы модуляции относят к непрямым. В частности, непрямыми являются интегральные системы модуляции, в которых модулированный сигнал $s'[b(t), t]$ в момент времени t зависит от интеграла модулирующей функции. К прямым системам модуляции можно отнести АМ, БАМ, ФМ и т. п., к непрямым — ЧМ.

Задачи

6.2.1. Записать ортогональные разложения для ограниченного интервалом T сообщения $b(t)$ на передаче, на приеме $b^*(t)$ и помехи $\varepsilon(t)$ на выходе приемника (детектора).

Показать, что при «слабом» белом гауссовом шуме в канале и известной точно форме сигнала помеха на выходе оптимального приемника $\varepsilon(t)$ — стационарный гауссов процесс с некоррелированными координатами и энергетическим спектром

$$G_{\text{вых}}(f) = \frac{G_{\text{ш}}}{\left(\frac{\partial s(\vec{\lambda},\, t)}{\partial \lambda_k}\right)^2}$$

6.2.2. Показать, что для прямых систем модуляции совместная плотность вероятности координат шума на выходе оптимального приемника при флуктуационной «слабой» помехе в канале и известной форме сигнала описывается выражением

$$w(\Delta\lambda_1,\, \Delta\lambda_2, \ldots,\, \Delta\lambda_{B_{\text{c}}}) = \frac{1}{(2\pi)^{B_{\text{c}}/2}\, \sigma^{B_{\text{c}}/2}} \exp\left(-\frac{\sum\limits_{k=1}^{B_{\text{c}}} \Delta\lambda_k^2}{2\sigma^2}\right),$$

где $\sigma^2 = \dfrac{G_{\text{ш}}}{2T\, \widetilde{\left(\dfrac{\partial s}{\partial b}\right)^2}}$ — дисперсия произвольной координаты шума.

6.2.3. Показать, что ОБП нельзя строго отнести к прямым системам модуляции, а дисперсия произвольной координаты шума на выходе оптимального приемника при «слабой» флуктуационной помехе в канале определяется для этой системы формулой $\sigma_k^2 = \dfrac{G_{\text{ш}}}{2T\, \gamma^2 U_m^2}$ и, как для произвольной прямой системы, не зависит от частоты.

6.2.4. Показать, что при известной форме сигнала и слабом шуме предельные значения выигрыша и обобщенного выигрыша в отношении *сигнал/шум* определяются выражениями:

$$g = \frac{F_{\text{к}}}{\Pi^2 P_{\text{с.вх}} \int\limits_0^{F_{\text{с}}} \frac{df}{\widetilde{\left[\frac{\partial}{\partial \lambda_k} \{s' [b(t),\ t]\}\right]^2}}};$$

$$g' = \frac{F_{\text{с}}}{\Pi^2 P_{\text{с.вх}} \int\limits_0^{F_{\text{с}}} \frac{df}{\widetilde{\left[\frac{\partial}{\partial \lambda_k} \{s' [b(t),\ t]\}\right]^2}}}.$$

6.2.5. Найти общие выражения для предельных значений выигрыша и обобщенного выигрыша прямых систем модуляции при слабом шуме в канале.

6.2.6. Найти общие выражения для предельных значений выигрыша и обобщенного выигрыша интегральных схем модуляции при слабом шуме в канале.

6.2.7. Показать, что выигрыш и обобщенный выигрыш для системы с амплитудной модуляцией при слабом шуме в канале определяется формулами:

$$g_{\text{АМ}} = \frac{2m^2}{m^2 + \Pi^2};\ g'_{\text{АМ}} = \frac{m^2}{m^2 + \Pi^2}$$

(m — коэффициент глубины модуляции) как при оптимальном, так и неоптимальном приеме (линейном детектировании огибающей).

6.2.8. Показать, что при слабом шуме предельные значения выигрыша и обобщенного выигрыша для системы балансной амплитудной модуляции $g_{\text{БАМ}} = 2$, $g'_{\text{БАМ}} = 1$ и что они реализуются при синхронном детектировании сигналов БАМ.

6.2.9. Показать, что предельные значения выигрыша и обобщенного выигрыша для системы однополосной модуляции $g_{\text{ОБП}} = g'_{\text{ОБП}} = 1$.

6.2.10. Показать, что предельный выигрыш и обобщенный выигрыш для системы фазовой модуляции при слабом шуме в канале: $g_{\text{ФМ}} = \frac{F_{\text{к}}}{F_{\text{с}}} \frac{\beta^2_{\text{ФМ}}}{\Pi^2}$; $g'_{\text{ФМ}} = \frac{\beta^2_{\text{ФМ}}}{\Pi^2}$ ($\beta_{\text{ФМ}}$ — индекс модуляции, $F_{\text{к}}/F_{\text{с}}$ — отношение полосы сигнала и сообщения). Убедиться в том, что при слабом шуме в канале используемая на практике схема детектирования ФМ обеспечивает предельную помехоустойчивость.

6.2.11. Показать, что при слабом шуме в канале распространенная схема частотного детектирования обеспечивает предельное значение обобщенного выигрыша, равного при больших индексах модуляции $\beta_{\text{чм}}$ величине $g'_{\text{чм}}=3\beta^2_{\text{чм}}/\Pi^2$.

6.2.12. Показать, что для системы амплитудно-импульсной модуляции АИМ предельное значение выигрыша $g_{\text{АИМ}}=\dfrac{1}{\tau_{\text{и}}F_{\text{c}}}$, а обобщенного выигрыша — $g'_{\text{АИМ}}=1$, где $\tau_{\text{и}}$ — длительность импульса; F_{c} — ширина спектра сообщения.

6.2.13. Показать, что для системы фазо-импульсной модуляции ФИМ предельные значения выигрыша и обобщенного выигрыша определяются формулами:

$$g_{\text{ФИМ}}\approx\frac{0{,}6}{\Pi^2}\left(\frac{F_{\text{к}}}{F_{\text{c}}}\right)^3;\quad g'_{\text{ФИМ}}=\frac{0{,}6}{\Pi^2}\left(\frac{F_{\text{к}}}{F_{\text{c}}}\right)^2,$$

где $F_{\text{к}}$ — ширина спектра канального сигнала.

6.2.14. Найти значения обобщенного выигрыша для систем двойной модуляции: ОБП — АМ, ФМ — БАМ, ЧМ—АМ, ОБП—ОБП, ФМ—ОБП, ЧМ—ОБП, ФИМ — БАМ, ОБП — ФМ, АМ — ФМ, БАМ — ФМ, БАМ — АМ.

6.2.15. Используя соотношение для выигрыша идеальной системы связи [9, 12] и реальных систем, показать, что пороговый эффект выражен тем резче, чем больше частотная избыточность канального сигнала.

6.2.16. Определить пороговое отношение *сигнал/шум* для реальной системы с частотной модуляцией в канале с нормальным белым шумом, полагая, что качество этой системы резко падает, когда огибающая шума превышает амплитуду сигнала.

6.2.17. Найти максимально возможное значение индекса модуляции системы ЧМ, при котором обеспечивается работа выше порога, найденного в Р.6.2.16, если требуется обеспечить отношение *сигнал/шум* на выходе детектора $h^2_{\text{вых}}=4600$. Пикфактор сообщения $\Pi=3$.

Решения и ответы

Р.6.2.1. Полагая, что полоса сообщения $b(t)$ ограничена частотой F_{c}, и выбирая в качестве базиса разложения систему ортонормированных функций $\sqrt{2}\cos k\dfrac{2\pi}{T}t$ и $\sqrt{2}\sin k\dfrac{2\pi}{T}t$, $k=1, 2, \cdot\cdot\cdot, B_{\text{c}}$, в соответствии с (6.6) имеем

$$b(t) = \sum_{k=1}^{B_c} \lambda_{2k-1} \sqrt{2}\ \sin(2k-1)\frac{2\pi}{T} t + \lambda_{2k}\sqrt{2}\cos 2k\frac{2\pi}{T} t. \tag{6.15}$$

Для принимаемого сигнала в соответствии с (6.9) получим

$$b^*(t) = \sum_{k=1}^{B_c} \lambda^*_{2k-1}\sqrt{2}\sin(2k-1)\frac{2\pi}{T} t + \lambda_{2k}\sqrt{2}\cos 2k\frac{2\pi}{T} t.$$

Помеху на выходе приемника $\varepsilon(t) = b^*(t) - b(t)$ можно представить следующим рядом:

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{B_c} \Delta\lambda_{2k-1}\sqrt{2}\sin(2k-1)\frac{2\pi}{T} t + \Delta\lambda_{2k}\sqrt{2}\cos 2k\frac{2\pi}{T} t,$$

где $\Delta\lambda_k = \lambda^*_k - \lambda_k$.

Оценки максимального правдоподобия координат λ_k, полученные при анализе смеси $z(t) = s'(\vec{\lambda}, t) + u(t)$, минимизируют функционал $d = \int\limits_0^T [z(t) - s'(\vec{\lambda}, t)]^2 d$, т. е. определяются из соотношений (уравнений правдоподобия)

$$\frac{\partial d}{\partial \lambda_k} = -2\int\limits_0^T [z(t) - s'(\vec{\lambda}, t)]\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\{s'(\lambda, t)\}\,dt = 0,\ k = 1, 2, \ldots, B_c. \tag{6.16}$$

Если под действием слабой помехи $u(t)$ принимаемое колебание $z(t)$ получит приращение $\Delta z(t) = u(t)$, то координаты сообщения на выходе приемника (детектора) получат приращения $\Delta\lambda_l$. Этим приращениям координат соответствует приращение канального сигнала

$$\Delta s'(\Delta\vec{\lambda}, t) = \sum_{l=1}^{B_c}\frac{\partial s'(\vec{\lambda}, t)}{\partial\lambda_l}\Delta\lambda_l. \tag{6.17}$$

Средний квадрат отклонения колебания $z(t) + \Delta z(t)$ от сигнала $s'(\vec{\lambda}, t) + \Delta s'(\Delta\vec{\lambda}, t)$ в пространстве Гильберта

$$d = \int\limits_0^T [z(t) + \Delta z(t) - s'(\vec{\lambda}, t) - \Delta s'(\Delta\vec{\lambda}, t)]^2 dt. \tag{6.18}$$

Если оптимальные оценки координат удовлетворяют уравнению правдоподобия $\frac{\partial d}{\partial\lambda_k}=0$, то из (6.18) с учетом (6.16) и (6.17) получаем

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T u(t)\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\{s'(\vec{\lambda},\ t)\}\,dt=\sum_{l=1}^{B_c}\Delta\lambda_l\frac{1}{T}\int\limits_0^T\frac{\partial}{\partial\lambda_l}\{s'(\vec{\lambda},\ t)\}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\{s'(\lambda,\ t)\}\,dt. \qquad (6.19)$$

Если $\frac{\partial}{\partial\lambda_l}\{s'(\vec{\lambda},\ t)\}$ с неодинаковыми индексами ортогональны (что имеет место для всех анализируемых систем модуляции), то из (6.19) следует

$$\Delta\lambda_k=\frac{1}{T}\int\limits_0^T\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\{s'(\vec{\lambda},\ t)\}\,u(t)\,dt\,\frac{1}{\overline{\left[\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\{s'(\vec{\lambda},\ t)\}\right]^2}}.$$

Таким образом, величины $\Delta\lambda_k$ на выходе оптимального приемника распределены нормально [при нормальном распределении помехи $u(t)$], не коррелированы при различных k (вследствие взаимной ортогональности сигналов $\frac{\partial}{\partial\lambda_l}\{s'(\vec{\lambda},\ t)\}$), имеют нулевые математические ожидания и дисперсии

$$\sigma_k^2=\Delta\lambda_k^2=\frac{1}{\overline{\left(\frac{\partial s'(\vec{\lambda},\ t)}{\partial\lambda_k}\right)^2}}\,\frac{1}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T\frac{\partial}{\partial\lambda_k}[s'(\vec{\lambda},\ t)]\,\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\times$$

$$\times[s'(\vec{\lambda},\ t_1)]\,\overline{u(t)\,u(t_1)}\,dt\,dt_1.$$

Так как $\overline{u(t)\,u(t_1)}=B_ш(t,\ t_1)=\frac{G_ш}{2}\,\delta(t_1-t)$, то с учетом фильтрующего свойства δ-функции находим

$$\sigma_k^2=\overline{\Delta\lambda_k^2}=\frac{1}{\overline{\left(\frac{\partial s'(\vec{\lambda},\ t)}{\partial\lambda_k}\right)^2}}\,\frac{G_ш}{2T}\,\frac{1}{T}\int\limits_0^T\left[\frac{\partial}{\partial\lambda_k}s'(\vec{\lambda},\ t)\right]^2dt=$$

$$=\frac{G_ш}{2T\,\overline{\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\{s'(\lambda',\ t)\}^2\right)}}.$$

Так как при любых видах модуляции

$$\widetilde{\left[\frac{\partial}{\partial\lambda_{2k-1}}\{s'(\vec{\lambda}, t)\}\right]^2} = \widetilde{\left[\frac{\partial}{d\lambda_{2k}}\{s'(\vec{\lambda}, t)\}\right]^2},$$

то коэффициенты при синусах и косинусах одинакового аргумента имеют одинаковые дисперсии $\sigma^2{}_{2k-1} = \sigma^2{}_{2k}$.

В этих условиях $\varepsilon(t) = \sum\limits_{k=1}^{B_\text{c}} \Delta\lambda_k \varphi_k(t)$ представляет собой стационарный нормальный шум с нулевым средним и средней мощностью на частоте $f = k/T$, равной $\sigma^2(f) = 2\sigma^2{}_{2k-1} = 2\sigma^2{}_{2k}$.

Поскольку спектральные компоненты ряда Фурье сдвинуты по частоте на $\Delta f = 1/T$, получаем

$$G_\text{вых}(f) = \frac{\sigma^2(f)}{\Delta f} = \frac{G_\text{ш}}{\widetilde{\left[\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\{s'[b(t), t]\}\right]^2}}.$$

Р.6.2.2. Для прямых систем модуляции с учетом ортогонального разложения $b(t)$ (см. Р.6.2.1) находим

$$\left[\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\{s'[b(t), t]\}\right]^2 = \left[\frac{\partial}{\partial b}\{s[b(t), t]\}\frac{\partial b(t)}{\partial\lambda_k}\right]^2 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial b}\{s'[b(t), t]\}^2 \varphi_k^2(t).$$

Частотный спектр функции $[\frac{\partial}{\partial b}s'(t)]^2$ обычно лежит значительно выше удвоенной верхней частоты спектра сообщения $b(t)$ [функции $\varphi_{B_\text{c}}^2(t)$]. Поскольку функции с неперекрывающимися спектрами ортогональны, среднее значение их произведения равно произведению их средних значений. С учетом ортонормированности функций $\varphi_k(t)$ имеем

$$\widetilde{\left[\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\{s'[b(t), t]\}\right]^2} = \widetilde{\left[\frac{\partial}{\partial b}\{s'[b(t), t]\}\right]^2 \varphi_k^2(t)} =$$

$$= \widetilde{\left[\frac{\partial}{\partial b}\{s'[b(t), t]\}\right]^2}$$

(эта величина не зависит от частоты). С учетом этого результата можем записать:

$$\sigma_k^2 = \overline{\Delta\lambda_k^2} = \frac{G_\text{ш}}{2T\,\widetilde{\left[\frac{\partial s'}{\partial b}\right]^2}} = \sigma^2$$

и

$$w_1(\Delta\lambda_k)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\Delta\lambda_k)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Поскольку величины $\Delta\lambda_k$ независимы,

$$w_{B_c}(\Delta\lambda_1,\ \Delta\lambda_2,\ .\ .\ .,\ \Delta\lambda_{B_c})=\prod_{k=1}^{B_c} w_1(\Delta\lambda_k)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{B_c/2}\sigma^{B_c/2}}\exp\left(-\frac{\sum\limits_{k=1}^{B_c}\Delta\lambda_k^2}{2\sigma^2}\right).$$

Р.6.2.3. Сигнал ОБП в месте приема можно записать в виде

$$s'(t)=\gamma U_m b(t)\cos(\omega_0 t+\varphi_0)-\gamma U_m\hat{b}(t)\sin(\omega_0 t+\varphi_0),$$

где $\hat{b}(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{b(t)}{t-\tau}d\tau$ — сигнал, сопряженный сообщению $b(t)$. Отсюда следует, что ОБП модуляцию нельзя строго считать прямой.

Если записать

$$b(t)=\sum_{k=1}^{B_c}\lambda_{2k-1}\sqrt{2}\sin(2k-1)\frac{2\pi}{T}t+\lambda_{2k}\sqrt{2}\cos 2k\frac{2\pi}{T}t,$$

$$-\infty<t<\infty,$$

то

$$\hat{b}(t)=-\sum_{k=1}^{B_c}\lambda_{2k-1}\sqrt{2}\cos(2k-1)\frac{2\pi}{T}t-\lambda_{2k}\sqrt{2}\sin 2k\frac{2\pi}{T}t,$$[1]

$$-\infty<t<\infty.$$

Тогда

$$s'(t)=\gamma U_m\left\{\sum_{k=1}^{B_c}\lambda_{2k}\sqrt{2}\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0-2k\frac{2\pi}{T}t\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{B_c}\lambda_{2k-1}\sqrt{2}\sin\left[(2k-1)\frac{2\pi}{T}t-\omega_0 t-\varphi_0\right]\right\}.$$

---

[1] Фактически сообщение финитно и определено лишь на интервале одного периода, а его преобразование Гильберта, строго говоря, отлично от написанного.

Дисперсия координаты шума на выходе оптимального приемника

$$\sigma_k^2 = \overline{\Delta\lambda_k^2} = \frac{G_{\text{ш}}}{2T\widetilde{\left(\frac{\partial s'}{\partial\lambda_k}\right)^2}} = \frac{G_{\text{ш}}}{2T\gamma^2 U_m^2}.$$

Р.6.2.4. Согласно ф-ле (6.10)

$$G_{\text{вых}}(f) = \frac{G_{\text{ш}}}{\widetilde{\left[\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\{s'[b(t),\ t]\}\right]^2}}.$$

Поэтому с учетом (6.12)

$$h_{\text{вых}}^2 = \frac{1}{\Pi^2 G_{\text{ш}} \int\limits_0^{F_{\text{с}}} \frac{df}{\widetilde{\left[\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\{s'[b(t),\ t]\}\right]^2}}}.$$

При равномерной спектральной плотности шума в канале можно записать

$$h_{\text{вх}}^2 = \frac{P_{\text{с.вх}}}{F_{\text{к}} G_{\text{ш}}}.$$

Подставляя найденные выражения для $h^2{}_{\text{вх}}$ и $h^2{}_{\text{вых}}$ в ф-лу (6.11), получаем выигрыш

$$g = \frac{F_{\text{к}}}{\Pi^2 P_{\text{с.вх}} \int\limits_0^{F_{\text{с}}} \frac{df}{\widetilde{\left[\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\{s'[b(t),\ t]\}\right]^2}}}.$$

Обобщенный выигрыш находим по ф-ле (6.13)

$$g' = \frac{F_{\text{с}}}{\Pi^2 P_{\text{с.вх}} \int\limits_0^{F_{\text{с}}} \frac{df}{\widetilde{\left[\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\{s'[b(t),\ t]\}\right]^2}}}.$$

Р.6.2.5. Как следует из Р.6.2.2, для прямых систем модуляции

$$\widetilde{\left[\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\{s'[b(t),\ t]\}\right]^2} = \widetilde{\left[\frac{\partial}{\partial b}\{s'[b(t),\ t]\}\right]^2}.$$

По ф-ле (6.10) получаем

$$G_{\text{вых}}(f) = \frac{G_{\text{ш}}}{\widetilde{\left[\frac{\partial}{\partial b}\{s'[b(t),\ t]\}\right]^2}}.$$

Подставляя величину $G_{\text{вых}}(f)$ в выражение для выигрыша, получаем для прямых систем модуляции с учетом независимости $\overline{\{\frac{\partial}{\partial b}[s'(b(t)t]\}^2}$ от частоты (Р.6.2.2)

$$g=\frac{F_{\text{к}}\overline{\left[\frac{\partial}{\partial b}\{s'[b(t),\ t]\}\right]^2}}{F_{\text{c}}\Pi^2 P_{\text{с.вх}}}.$$

По ф-ле (6.13)

$$g'=\frac{\overline{\left[\frac{\partial}{\partial b}\{s'[b(t),\ t]\}\right]^2}}{\Pi^2 P_{\text{с.вх}}}.$$

Р.6.2.6. Введем обозначение $\nu(t)=\int b(t)dt=$ $=\sum\limits_{k=1}^{B_{\text{c}}}\lambda_k\int\varphi_k(t)dt$. С учетом этого имеем при интегральной модуляции

$$\overline{\left[\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\{s'(\nu(t),\ t)\}\right]^2}=\overline{\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\{s'[\nu(t),\ t]\}^2\right]}\left(\frac{\partial\nu}{\partial\lambda_k}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{\omega_k^2}\overline{\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\{s'[\nu(t),\ t]\}\right]^2},$$

так как

$$\overline{\left[\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\{\nu(t)\}\right]^2}=\overline{\left[\int\varphi_k(t)\,dt\right]^2}=\frac{1}{\omega_k^2}.$$

Величина $\overline{[\frac{\partial}{\partial\nu}\{s'[\nu(t),\ t]\}]^2}$ не зависит от частоты.

Подставляя найденное выражение для $\overline{\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\{s'[\nu(t),\ t]\}]^2}$ в ф-лу (6.10), находим энергетический спектр на выходе оптимального приемника при интегральной модуляции

$$G_{\text{вых}}(f)=\frac{G_{\text{ш}}4\pi^2f^2}{\overline{\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\{s'[\nu(t),\ t]\}\right]^2}}.$$

По ф-лам (6.11) и (6.13) с учетом Р.6.2.4 находим:

$$g=\frac{F_{\text{к}}\overline{\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\{s'[\nu(t),\ t]\}\right]^2}}{\Pi^2 P_{\text{с.вх}}4\pi^2\int\limits_0^{F_{\text{c}}}f^2df}=\frac{3F_{\text{к}}\overline{\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\{s'[\nu(t),\ t]\}\right]^2}}{4\pi^2F_{\text{c}}^3\Pi^2 P_{\text{с.вх}}};$$

$$g' = \frac{3\,\overline{\left[\dfrac{\partial}{\partial \nu}\{s'[\nu(t),\ t]\}\right]^2}}{4\pi^2 F_{\text{с}}^2 \Pi^2 P_{\text{с.вх}}}.$$

Р.6.2.7. Запишем сигнал в месте приема при амплитудной модуляции в следующем виде: $s'[b(t),\ t] = \gamma U_m[1 + mb(t)]\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ (полагаем, что γU_m, ω_0 и φ_0 известны в месте приема).
Находим:

$$\frac{\partial}{\partial b}\{s'[b(t),\ t]\} = \gamma U_m m \cos(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$\overline{\left[\frac{\partial}{\partial b}\{s'[b(t), t]\}\right]^2} = \gamma^2 U_m^2 m^2\, \overline{\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)} =$$

$$= \gamma^2 U_m^2 m^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\overline{\cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)}\right] = \frac{1}{2}\gamma^2 U_m^2 m^2.$$

Определяем среднюю мощность входного сигнала, полагая, что модулирующая функция $b(t)$ меняется медленно по сравнению с $\cos \omega_0 t$ и не содержит постоянной составляющей:

$$P_{\text{с.вх}}[s'[b(t),\ t]]^2 = \gamma^2 U_m^2 [1 + mb(t)]^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma^2 U_m^2 \left(1 + \frac{m^2}{\Pi^2}\right).$$

Используя теперь соотношения для выигрыша и обобщенного выигрыша прямых систем модуляции, найденные в Р.6.2.5, и учитывая, что при АМ $F_{\text{к}} = 2F_{\text{с}}$, находим:

$$g_{\text{АМ}} = \frac{F_{\text{к}}}{F_{\text{с}}}\,\frac{\gamma^2 m^2 U_m^2}{2}\,\frac{1}{\Pi^2\left(1 + \dfrac{m^2}{\Pi^2}\right)\dfrac{\gamma^2 U_m^2}{2}} = \frac{2m^2}{m^2 + \Pi^2};$$

$$g'_{\text{АМ}} = \frac{F_{\text{с}}}{F_{\text{к}}}\, g_{\text{АМ}} = \frac{m^2}{m^2 + \Pi^2}.$$

Используя результаты Р.2.4.10, можно видеть, что такие же значения g и g' обеспечивает при слабом шуме обычное линейное детектирование АМ сигнала. Следовательно, при слабом шуме широко распространенный прием АМ сигналов практически реализует оптимальную обработку.

Р.6.2.8. Принимаемый сигнал при БАМ $s'(t) = \gamma U_m b(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Тогда с учетом Р.6.2.5

$$g_{\text{БАМ}} = \frac{F_{\text{к}}}{F_{\text{с}}} = 2;\; g'_{\text{БАМ}} = \frac{F_{\text{с}}}{F_{\text{к}}}\, g_{\text{БАМ}} = 1.$$

Если на вход синхронного детектора с опорным сигналом $s_{\text{оп}}(t) = 2\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ поступает смесь

$$z(t) = \gamma\, b(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + X_{\text{п}}(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \\ + Y_{\text{п}}(t)\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

[$X_{\text{п}}(t)$, $Y_{\text{п}}(t)$ — квадратурные компоненты канального шума с нулевыми средними значениями и дисперсией (в полосе сигнала $F_{\text{к}}$) $\overline{X^2}_{\text{п}} = \overline{Y^2} = F_{\text{к}} G_{\text{ш}}$], то на выходе синхронного детектора (после умножителя и низкочастотной фильтрации) сигнальная составляющая $y_{\text{с}}(t) = \gamma b(t)$, а шумовая составляющая $y_{\text{п}}(t) = X_{\text{п}}(t)$. Средняя мощность шума на выходе $P_{\text{ш.вых}} = \overline{X^2}_{\text{п}}(t) = 2G_{\text{ш}} F_{\text{с}}$ (так как энергетический спектр шума на выходе *ФНЧ* больше, чем на входе, в 2 раза).

$$h^2_{\text{вых}} = \frac{\gamma^2}{\Pi^2 2F_{\text{с}} G_{\text{ш}}};\; h^2_{\text{вх}} = \frac{\gamma^2}{\Pi^2 2G_{\text{ш}} F_{\text{к}}};\; g_{\text{БАМ}} = \frac{F_{\text{к}}}{F_{\text{с}}} = 2,\; g'_{\text{БАМ}} = 1.$$

Следовательно, синхронное детектирование сигнала БАМ обеспечивает оптимальную обработку.

Р.6.2.9. Средняя мощность шума (дисперсия шума) на выходе приемника с учетом Р.6.2.3

$$P_{\text{ш.вых}} = B_{\text{с}}\,\sigma_k^2 = 2F_{\text{с}} T\,\sigma_k^2 = \frac{G_{\text{ш}} F_{\text{с}}}{\gamma^2 U_m^2}.$$

Таким образом,

$$h^2_{\text{вых}} = \frac{\gamma^2 U_m^2}{\Pi^2 G_{\text{ш}} F_{\text{с}}}.$$

Средняя мощность сигнала ОБП (см. Р.6.2.3) $P_{\text{с.вх}} = \gamma^2 U_m^2 \overline{b^2(t)} = \frac{\gamma^2 U_m^2}{\Pi^2}$, поскольку $\overline{b^2(t)} = \overline{\hat{b}^2(t)}$, а $\int\limits_0^T b(t)\hat{b}(t)\sin(2\omega_0 t + \varphi)\,dt$ пренебрежимо мал по сравнению с $\overline{b^2(t)}$. Поэтому $h^2_{\text{вх}} = \frac{\gamma^2 U_m^2}{\Pi^2 G_{\text{ш}} F_{\text{с}}}$, так как при ОБП

$F_к = F_с$. Следовательно,

$$g_{ОБП} = \frac{h^2_{вых}}{h^2_{вх}} = 1; \quad g'_{ОБП} = 1.$$

Р.6.2.10. Запишем принимаемый сигнал при ФМ в виде

$$s'[b(t),\ t] = \gamma U_m \cos[\omega_0 t + \Delta\varphi\, b(t) + \varphi_0].$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial b}\{s'[b(t),\ t]\} = -\gamma U_m \Delta\varphi \sin[\omega_0 t + \Delta\varphi\, b(t) + \varphi_0]$$

и

$$\widetilde{\left[\frac{\partial}{\partial b}\{s'[b(t),\ t]\}\right]^2} = \gamma^2 U_m^2\, \Delta\varphi^2\, \widetilde{\sin^2[\omega_0 t + \Delta\varphi\, b(t) + \varphi_0]} =$$

$$= \frac{\gamma^2 U_m^2 \Delta\varphi^2}{2}.$$

Средняя мощность принимаемого сигнала $P_{с.вх} = \frac{1}{2}\gamma^2 U^2{}_m$. Подставляя найденные выражения $P_{с.вх}$ и $\overline{\left[\frac{\partial}{\partial b}\{s'[b(t),\ t]\}\right]^2}$ в формулы для выигрыша и обобщенного выигрыша из Р.6.2.4, получаем:

$$g_{ФМ} = \frac{F_к}{F_с}\,\frac{\gamma^2 U_m^2 \Delta\varphi^2\, 2}{2\Pi^2 \gamma^2 U_m^2} = \frac{F_к}{F_с}\,\frac{\beta^2_{ФМ}}{\Pi^2}$$

($\beta_{ФМ} = \Delta\varphi$ — индекс фазовой модуляции),

$$g'_{ФМ} = \frac{F_с}{F_к}\, g_{ФМ} = \frac{\beta^2_{ФМ}}{\Pi^2}.$$

Считая, что полоса частот канального сигнала при угловой модуляции $F_к \approx 2(\beta + 1) F_с$ [1], имеем $\beta = \left(\frac{F_к}{2F_с} - 1\right)$, и можно написать:

$$g_{ФМ} = \frac{F_к}{F_с\, \Pi^2}\left(\frac{F_к}{2F_с} - 1\right)^2; \quad g'_{ФМ} = \frac{1}{\Pi^2}\left(\frac{F_к}{2F_с} - 1\right)^2.$$

---

[1] При $\beta \gg 1$ имеем $F_к \approx 2\beta F_с$.

Смесь ФМ сигнала и канального шума запишем в виде

$$z(t) = \gamma U_m \cos[\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi\, b(t)] + X_\text{п}(t)\cos(\omega_0 \ + \varphi_0) +$$
$$+ Y_\text{п}(t)\sin(\omega_0 t + \varphi_0) =$$
$$= \sqrt{[\gamma U_m \cos(\Delta\varphi\, b(t)) + X_\text{п}(t)]^2 + [\gamma U_m \sin(\Delta\varphi\, b(t)) + Y_\text{п}(t)]^2} \times$$
$$\times \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \theta), \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{Y_\text{п} - \gamma U_m \sin(\Delta\varphi\, b(t))}{X_\text{п} + \gamma U_m \cos(\Delta\varphi\, b(t))}.$$

Будем считать, что сигнал на выходе фазового детектора $y_\text{вых}(t)$ пропорционален величине θ и содержит частотные составляющие в полосе сообщения $b(t)$ [1]:

$$y_\text{вых}(t) = \operatorname{arctg}\frac{Y'_\text{п}(t) - \gamma U_m \sin(\Delta\varphi\, b(t))}{X'_\text{п}(t) + \gamma U_m \cos(\Delta\varphi\, b(t))},$$

где $X'_\text{п}$, $Y'_\text{п}$ — составляющие помехи в полосе сообщения.

При большом отношении *сигнал/шум*, используя методику Р.6.1.4, получаем

$$y_\text{вых}(t) = \Delta\varphi\, b(t) - \frac{X'_\text{п}(t)\cos(\Delta\varphi\, b(t)) - Y'_\text{п}(t)\sin(\Delta\varphi\, b(t))}{\gamma U_m}.$$

Средняя мощность сигнала на выходе $P_\text{с.вых} = \Delta\varphi^2 \overline{b^2(t)} = \beta^2_\text{ФМ}/\Pi^2$. Средняя мощность шума на выходе

$$P_\text{ш.вых} = \frac{\overline{X'^2_\text{п}}}{\gamma^2 U_m^2} = \frac{2G_\text{ш} F_\text{с}}{\gamma^2 U_m^2}.$$

Этот результат объясняется тем, что если энергетический спектр шума $X_\text{п}(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ [или $Y_\text{п}(t)\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$] со средней частотой ω_0 равен $G_\text{ш}$, то энергетический спектр $X_\text{п}(t)$ ($Y_\text{п}(t)$), т. е. модулирующего процесса, следует принять равным $2G_\text{ш}$. Учтено также, что процессы $X'_\text{п}(t)$ и $Y'_\text{п}(t)$ независимы и определены в полосе сообщения. Таким образом,

$$h^2_\text{вых} = \frac{\beta^2_\text{ФМ} \gamma^2 U_m^2}{\Pi^2 2G_\text{ш} F_\text{с}}.$$

Поскольку

$$h^2_\text{вх} = \frac{\gamma^2 U_m^2}{2G_\text{ш} F_\text{к}}, \text{ то } g_\text{ФМ} = \frac{\beta^2_\text{ФМ} F_\text{к}}{\Pi^2 F_\text{с}} \text{ и } g'_\text{ФМ} = \frac{\beta^2_\text{ФМ}}{\Pi^2}.$$

---

[1] Для удовлетворительного детектирования ФМ сигнала с большим индексом модуляции на практике используется частотный детектор с последующим интегрированием выходного продукта.

Следовательно, используемый на практике способ детектирования ФМ сигнала реализует при большом отношении *сигнал/шум* предельную помехоустойчивость.

Р.6.2.11. Представим ЧМ колебание в месте приема в виде

$$s'[\nu(t),\ t]=\gamma U_m\cos[\omega_0t+\Delta\omega\nu(t)+\varphi_0].$$

Здесь $\Delta\omega=2\pi\Delta f$ — девиация частоты; $\nu(t)=\int b(t)dt$. Мощность сигнала на входе приемника

$$P_{\text{с.вх}}=\gamma^2U_m^2\,\overline{\cos^2[\omega_0t+\Delta\omega\nu(t)+\varphi_0]}=\frac{1}{2}\gamma^2U_m^2.$$

Найдем $\overline{\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\{s'[\nu(t),\ t]\}\right]^2}$:

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\{s'[\nu(t),\ t\}=-\gamma U_m\Delta\omega\sin[\omega_0t+\Delta\omega\nu(t)+\varphi_0],$$

$$\overline{\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\{s'[\nu(t),\ t]\}\right]^2}=\gamma^2U_m^2\,\Delta\omega\,\overline{\sin^2[\omega_0t+\Delta\omega\nu(t)+\varphi_0]}=$$

$$=\frac{1}{2}\gamma^2U_m^2\Delta\omega^2.$$

Воспользовавшись формулами для выигрыша и обобщенного выигрыша, полученными в Р.6.2.5, найдем

$$g_{\text{ЧМ}}=\frac{3F_{\text{к}}\dfrac{1}{2}\gamma^2U_m^2\,4\pi^2\Delta f^2}{4\pi^2F_{\text{с}}^3\,\Pi^2\dfrac{1}{2}\gamma^2U_m^2}=\frac{3\Delta f^2F_{\text{к}}}{\Pi^2F_{\text{с}}^3}.$$

С учетом того, что $\beta_{\text{ЧМ}}=\Delta f/F_{\text{с}}$ и $F_{\text{к}}=2\Delta f=2\beta_{\text{ЧМ}}F_{\text{с}}$ (при $\beta_{\text{ЧМ}}\gg1$), $g_{\text{ЧМ}}=6\beta^3_{\text{ЧМ}}/\Pi^2$. Обобщенный выигрыш

$$g'_{\text{ЧМ}}=\frac{3\Delta f^2}{\Pi^2F_{\text{с}}^2}=\frac{3\beta_{\text{ЧМ}}^2}{\Pi^2}.$$

Смесь ЧМ сигнала и канального шума запишем с учетом Р.6.2.10 в виде

$$z(t)=\sqrt{\left[\gamma U_m\cos\left(\Delta\omega\int b(t)dt\right)+X_{\text{п}}(t)\right]^2+\to}$$

$$\overline{\to+\left[\gamma U_m\sin\left(\Delta\omega\int b(t)\,dt+Y_{\text{п}}(t)\right]^2\right.}\cos(\omega_0t+\varphi_0+\theta);$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{Y_{\text{п}}-\gamma U_m\sin\left(\Delta\omega\int b(t)\,dt\right)}{X_{\text{п}}+\gamma U_m\cos\left(\Delta\omega\int b(t)\,dt\right)}.$$

Будем считать, что сигнал на выходе частотного детектора $y_{\text{вых}}(t)$ пропорционален мгновенной частоте $d\theta/dt$ и содержит частотные составляющие в полосе сообщения $b(t)$:

$$y_{\text{вых}}(t) = \frac{d\left\{\operatorname{arc\,tg}\dfrac{Y'_{\text{п}} - \gamma U_m \sin\left(\Delta\omega \int b(t)\,dt\right)}{X'_{\text{п}} + \gamma U_m \cos\left(\Delta\omega \int b(t)\,dt\right)}\right\}}{dt}.$$

При больших отношениях *сигнал/шум* с учетом Р.6.2.10

$$y_{\text{вых}}(t) = \Delta\omega\, b(t) - \frac{d\,\varepsilon(t)}{dt},$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\gamma U_m}\left[X'_{\text{п}}(t)\cos\left(\Delta\omega\int b(t)\,dt\right) - Y'_{\text{п}}(t)\sin\left(\Delta\omega\int b(t)\,dt\right)\right].$$

Если $X'_{\text{п}}(t)$ и $Y'_{\text{п}}(t)$ — независимые случайные процессы с нулевыми средними и одинаковыми дисперсиями $\overline{X'^2_{\text{п}}}(t) = \overline{Y'^2_{\text{п}}}(t)$, то $\varepsilon(t)$ представляет собой стационарный процесс с нулевым средним значением, ограниченной дисперсией $\dfrac{\overline{X'^2_{\text{п}}(t)}}{\gamma^2 U_m^2}$ и равномерным энергетическим спектром $\dfrac{2G_{\text{ш}}}{\gamma^2 U_m^2}$. Случайный процесс $\dfrac{d\,\varepsilon(t)}{dt}$ также стационарен и имеет энергетический спектр $\dfrac{2G_{\text{ш}}\omega^2}{\gamma^2 U_m^2}$. Следовательно, средняя мощность шума в полосе сообщения на выходе частотного детектора

$$P_{\text{ш.вых}} = \frac{2G_{\text{ш}} 4\pi^2}{\gamma^2 U_m^2}\int\limits_0^{F_{\text{c}}} f^2 dt = \frac{2G_{\text{ш}} 4\pi^2 F_{\text{c}}^3}{3\gamma^2 U_m^2}.$$

Для отношения *сигнал/шум* на выходе частотного детектора имеем

$$h^2_{\text{вых}} = \frac{\Delta\omega^2\, 3\gamma^2 U_m^2}{\Pi^2\, 2G_{\text{ш}}\, 4\pi^2 F_{\text{c}}^3}.$$

Отношение *сигнал/шум* на входе $h^2_{\text{вх}} = \dfrac{\gamma^2 U_m^2}{2G_{\text{ш}} F_{\text{к}}}$, и для $g_{\text{ЧМ}}$ и $g'_{\text{ЧМ}}$ получаем тот же результат, что и при оптимальном приеме.

Р.6.2.12. Система АИМ относится к прямым системам модуляции. В качестве переносчика сообщения в этой системе используется импульсная последовательность (рис. 6.6*а*), которую при отсутствии модуляции на интервале длительности сообщения можно записать $f(t) = \sum\limits_{k=-T/2T_и}^{T/2T_и} F(f - kT_и)$, где $F(t)$ определяет форму импульса, а $T_и = \frac{1}{2F_и} \leqslant \frac{1}{2F_с}$ — период следования импульсов.

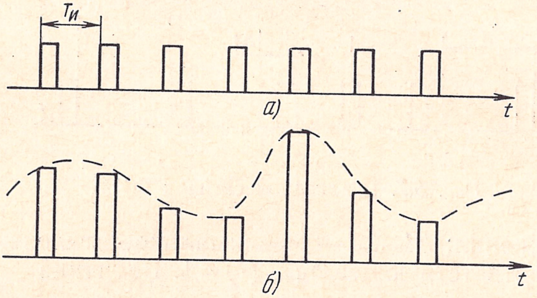


Рис. 6.6. Импульсный переносчик (*а*) и реализация сигнала АИМ (*б*)

Сигнал АИМ в месте приема (рис. 6.6*б*) можно записать

$$s'[b(t),\ t] = \gamma b(t) f(t).$$

Средняя мощность этого сигнала

$$P_{\text{с.вх}} = \overline{\{s'[b(t),\ t]\}^2} = \gamma^2 \overline{b^2(t)}\,\overline{f^2(t)} = \gamma^2 \frac{\overline{f^2(t)}}{\Pi^2},$$

а $\overline{\left[\frac{\partial}{\partial b}\{s'[b(t),\ t]\}\right]^2} = \gamma^2 \overline{f^2(t)}.$

Согласно Р.6.2.5

$$g_{\text{АИМ}} = \frac{F_к}{F_с}\,\frac{\gamma^2 \overline{f^2(t)}}{\Pi^2}\,\frac{\Pi^2}{\gamma^2 \overline{f^2(t)}} = \frac{F_к}{F_с} \approx \frac{1}{\tau_и F_с} > 1;\ g'_{\text{АИМ}} = 1.$$

Р.6.2.13. Система ФИМ относится к прямым системам модуляции, а сигнал при ФИМ (рис. 6.7) можно записать в виде

$$s'(t) = \gamma \sum_{k=-T/2T_и}^{T/2T_и} F(t_к),$$

где $t_k=t-kT_и+\Delta t_{макс}b(kT_и)$ определяет временно́е положение модулируемого импульса; $\Delta t_{макс}b(kT_и)$ — мгновенное значение временно́го сдвига импульса от сред-

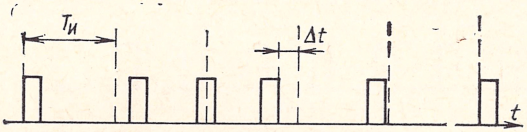


Рис. 6.7. Реализация сигнала ФИМ

него положения; $\Delta t_{макс}$ — максимальное отклонение импульса, соответствующее $b_{макс}(t)=1$. Величина

$$P_{с.вх}=\overline{[s'(t)]^2}=\gamma^2\frac{1}{\tau_и}\int\limits_{\tau_и/2}^{\tau_и/2}F^2(t)\,dt.$$

Определим функцию $\frac{\partial}{\partial b}\{s'(t)\}$:

$$\frac{\partial}{\partial b}\{s'(t)\}=\frac{\partial\{s'(t)\}}{\partial t_к}\,\frac{dt_к}{db}=\Delta\,t_{макс}\gamma\sum_{k-T/2T_и}^{T/2T_и}\frac{\partial F(t_k)}{\partial t_k}.$$

Так как при ФИМ $\overline{\left[\frac{\partial F(t_k)}{\partial t_k}\right]^2}=\overline{\left[\frac{\partial F(t)}{\partial t}\right]^2}$, число импульсов на интервале T равно $T/T_и$ и они не перекрываются, то можно записать

$$\overline{\left[\frac{\partial}{\partial b}\{s'(t)\}\right]^2}=\Delta\,t^2_{макс}\,\gamma^2\,\frac{T}{T_и}\,\frac{1}{T}\int\limits_{-\tau_и/2}^{\tau_и/2}\left[\frac{\partial F^2(t)}{\partial t}\right]^2dt.$$

С учетом этого результата находим:

$$g_{ФИМ}=\frac{1}{\Pi^2 k_ф}\left(\frac{\Delta\,t_{макс}}{\tau_и}\right)^2\frac{F_к}{F_с};\quad g'_{ФИМ}=\frac{1}{\Pi^2\,k_ф}\left(\frac{\Delta\,t_{макс}}{\tau_и}\right)^2.$$

Здесь $\qquad k_ф=\int\limits_{-\tau_и/2}^{\tau_и/2}F^2(t)dt/\tau^2_и\int\limits_{-\tau_и/2}^{\tau_и/2}\left[\frac{\partial F(t)}{\partial t}\right]^2dt$ —

коэффициент, определяемый формой импульса.

Для обычно используемых импульсов плавной формы $k_ф\approx0{,}1$, $F_к\approx1/\tau_и$. Поскольку

$$\Delta\,t_{макс}\leqslant\frac{T_и}{2}=\frac{1}{2F_и}\leqslant\frac{1}{4F_с},\quad\text{то}\quad\left(\frac{\Delta\,t_{макс}}{\tau_и}\right)^2\leqslant\frac{1}{16}\left(\frac{F_к}{F_с}\right)^2.$$

Предельные значения выигрыша и обобщенного выигрыша при ФИМ:

$$g_{\text{ФИМ}} \approx \frac{0,6}{\Pi^2}\left(\frac{F_\text{к}}{F_\text{c}}\right)^3;\ g'_{\text{ФИМ}} \approx \frac{0,6}{\Pi^2}\left(\frac{F_\text{к}}{F_\text{c}}\right)^2.$$

Р.6.2.14. Поскольку во всех заданных системах на второй ступени осуществляется прямая модуляция, можно оценить обобщенный выигрыш по ф-ле (6.14).

При этом следует иметь в виду, что на второй ступени следует брать пикфактор промежуточного сигнала. Этот пикфактор равен $\sqrt{2}$ при ЧМ и ФМ и $\dfrac{\sqrt{2}(1+m)}{\sqrt{2+m^2}}$ при АМ. При ОБП пикфактор промежуточного сигнала примерно равен пикфактору первичного сигнала П, а при БАМ — $\sqrt{2}\,\Pi$. Найдем величину $g'_{\text{ЧМ—АМ}}$:

$$g'_{\text{ЧМ—АМ}} = \frac{3\beta^2_{\text{ЧМ}}}{\Pi^2}\,\frac{m^2}{m^2+2} = \frac{3m^2\,\beta^2_{\text{ЧМ}}}{2\Pi^2\left(1+\dfrac{m^2}{2}\right)}.$$

Результаты расчетов для других систем двойной модуляции приведены в табл. 6.1.

ТАБЛИЦА 6.1

Система модуляции	Обобщенный выигрыш	Система модуляции	Обобщенный выигрыш
ОБП—АМ	$\dfrac{m^2}{\Pi^2+m^2}$	ФИМ—БАМ	$\dfrac{0,6}{\Pi^2}\left(\dfrac{F_\text{к}}{F_\text{c}}\right)^2$
ЧМ—АМ	$\dfrac{3m^2\,\beta^2_{\text{ЧМ}}}{\Pi^2(m^2+2)}$	АМ—ФМ	$\dfrac{m^2\,\beta^2_{\text{ФМ}}(2+m^2)}{2(\Pi^2+m^2)(1+m)^2}$
ОБП—ОБП	1	БАМ—ФМ	$\dfrac{\beta^2_{\text{ФМ}}}{2\Pi^2}$
ФМ—ОБП	$\dfrac{\beta^2_{\text{ФМ}}}{\Pi^2}$	БАМ—АМ	$\dfrac{m^2}{m^2+2\Pi^2}$
ЧМ—ОБП	$\dfrac{3\beta^2_{\text{ЧМ}}}{\Pi^2}$	ОБП—ФМ	$\dfrac{\beta^2_{\text{ФМ}}}{\Pi^2}$
ФМ—АМ	$\dfrac{\beta^2_{\text{ФМ}}}{\Pi^2}$		

Р.6.2.15. Для идеальной системы связи при гауссовом источнике и канале согласно [9, 12] выигрыш

$$g = \frac{\left(1 + h^2_{\text{вх}}\right)^{K_F} - 1}{h^2_{\text{вх}}}.$$

Зависимость $g(h^2_{\text{вх}})$ при некоторых значениях коэффициента K_F дана на рис. 6.8. Для всех рассмотренных нами реальных систем модуляции при слабом шуме $g = g_0$ не зависит от $h^2_{\text{вх}}$ (сплошные линии на рис. 6.8). Предельные минимально возможные значения порога $h^2_{\text{пор}}$ при заданном K_F можно определить как точки пересечения сплошных и пунктирных кривых рис. 6.8 или из уравнения

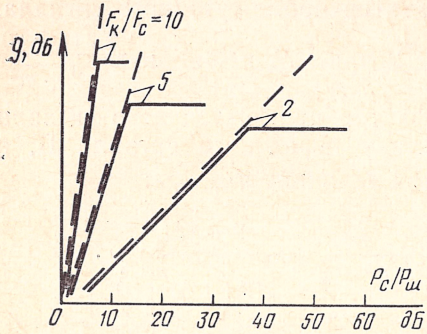


Рис. 6.8. Зависимость выигрыша системы модуляции от отношения *сигнал/шум* в канале: — — — — — для идеальной системы; ———— для реальной системы

$$\frac{\left(1 + h^2_{\text{пор}}\right)^{K_F} - 1}{h^2_{\text{пор}}} = g_0. \tag{6.20}$$

Для системы ОБП (без частотной избыточности $K_F = 1$) (6.20) удовлетворяется при любом значении $h^2_{\text{пор}}$ (в том числе при $h^2_{\text{пор}} = 0$), т. е. для этой системы пороговый эффект отсутствует. Для системы БАМ $K_F = 2$, $g_0 = 2$, $h^2_{\text{пор}} = 0$.

При $K_F \gg 1$ (системы с большой частотной избыточностью) [9] следует величина порога

$$h^2_{\text{пор}} \approx g_0^{1/K_F}. \tag{6.21}$$

Из (6.21) видно, что с ростом частотной избыточности системы падает порог, стремясь к 1 при $k_F \to \infty$.

Р.6.2.16. Огибающая помехи типа белого шума распределена по закону Рэлея

$$w_1(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right).$$

Пороговое значение амплитуды сигнала $U_{\text{пор}}$ найдем из условия

$$P(r > U_{\text{пор}}) = \int\limits_{U_{\text{пор}}}^{\infty} w_1(r)\,dr = \exp\left(-\frac{U_{\text{пор}}^2}{2\sigma^2}\right) = 10^{-3},$$

т. е. из условия, что огибающая шума r с малой вероятностью (в течение 0,1% интервала связи) превышает значение $U_{\text{пор}}$. Отсюда $\frac{U_{\text{пор}}^2}{2\sigma^2} \approx 7$. Поскольку $\frac{U_{\text{пор}}^2}{2} = P_{\text{с.пор}}$ и $\sigma^2 = P_{\text{ш}}$, имеем

$$h_{\text{пор}}^2 = \left(\frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}}\right)_{\text{пор.вх}} = 7.$$

Обратим внимание на то, что полученное значение порога для реальной системы ЧМ существенно превышает минимально возможное его значение, близкое согласно (6.21) к 1. Следовательно, имеется возможность совершенствования приемников при ЧМ для снижения порога помехоустойчивости и тем самым увеличения дальности связи при той же мощности передатчика.

Р.6.2.17. Используя Р.6.2.10, получаем для средней мощности сигнала на входе приемника при работе выше порога:

$$P_{\text{с.вх}} = \frac{h_{\text{вых}}^2}{g} P_{\text{ш.вх}} = \frac{\Pi^2 h_{\text{вых}}^2 P_{\text{ш.вх}}}{6\beta_{\text{ЧМ}}^3}; \tag{6.22}$$

$$P_{\text{вх.пор}} = h_{\text{пор}}^2 P_{\text{ш.вх}}. \tag{6.23}$$

Чтобы (6.22) превысило (6.23), требуется, чтобы индекс модуляции $\beta_{\text{ЧМ}} \leqslant \sqrt[3]{\frac{h_{\text{вых}}^2 \Pi^2}{6h_{\text{пор}}^2}}$. При $h^2_{\text{вых}} = 4600$, $\Pi = 3$, $h^2_{\text{пор}} = 7$ максимально возможное значение $\beta_{\text{ЧМ}} = 10$.

6.3. Передача непрерывных сообщений дискретными методами

В технике связи все больший интерес вызывают дискретные методы передачи непрерывных сообщений или цифровые системы связи.

В настоящее время используются, главным образом, цифровые системы связи с кодово-импульсной модуляцией (КИМ) и дельта-модуляцией (ДМ). В обеих системах осуществляется квантование во времени непрерывного сообщения $b(t)$, т. е. преобразование его в последовательность отсчетов $b(t_i)$. Чаще всего это квантование осуществляется с равномерным шагом $T_к$. Квантование отсчетов по уровням в системе КИМ заключается в том, что значение отсчета $b(t_i)$ сравнивается с постоянными порогами квантования h_l[1].

Если $h_{l-1} < b(t_i) < h_l$, то вырабатывается дискретный сигнал $b_k(t_i)$ ($k=1, 2, 3, \ldots,$ L — число уровней квантования), который по каналу передается обычно n-значным равномерным двоичным кодом. На приемной стороне в результате декодирования принятого сигнала вырабатывается определенный уровень оценки $b^*_k(t)$, который иногда поддерживается постоянным до момента декодирования следующего сигнала.

Однако чаще всего на приемной стороне производится дополнительное сглаживание квантованного процесса линейным фильтром с переходной характеристикой, определяемой коэффициентом корреляции сообщения $R_b(\tau)$.

В системе ДМ по каналу в дискретном виде (посредством квантования по уровням) передается сигнал разности соседних отсчетов. Эту систему можно рассматривать как систему, в которой уровни квантования очередного отсчета $h_k(t_i)$ меняются во времени, определяясь оценками предшествующих отсчетов. Система ДМ на практике реализуется как двухуровневая (в канале передается «1», если разность соседних отсчетов положительная, и «0», если эта разность отрицательная). Оценка отсчета в месте приема $b^*(t_i)$ осуществляется путем накопления сигналов, соответствующих передаче двоичных импульсов по каналу связи.

При квантовании сообщений по уровню возникает ошибка (даже если дискретный канал без шумов), обусловленная заменой истинного значения отсчета сигнала ближайшим разрешенным на передаче и характером устройств сглаживания на приеме. Средний квадрат этой ошибки (ошибки квантования) может быть определен при стационарном сообщении по формулам [2]:

---

[1] Чаще всего квантование по уровням равномерное, т. е. $h_l - h_{l-1} = \Delta$ — шаг квантования.

$$\varepsilon_I^2 = \sigma_b^2 \left[1 - (1 - \mathring{\varepsilon}_0^2)\, \frac{1}{T} \int\limits_0^T R_b^2(\tau)\, d\,\tau \right] \qquad (6.24)$$

для системы КИМ;

$$\varepsilon_I^2 = \sigma_b^2 \left[1 - \frac{(1 - \mathring{\varepsilon}_0^2)}{1 - R_b^2(T)\, \mathring{\varepsilon}_0^2}\, \frac{1}{T} \int\limits_0^T R_b^2(\tau)\, d\,\tau \right] \qquad (6.25)$$

для системы ДМ.

Здесь $\sigma^2{}_b$ — дисперсия (средняя мощность) сообщения; $\mathring{\varepsilon}^2{}_0 = \frac{\varepsilon^2}{\sigma_b^2}$ — нормированное значение среднего квадрата ошибки при передаче одного отсчета сообщения и заданном числе уровней квантования L; $R_b(\tau)$ — коэффициент корреляции сообщения по времени.

Наличие шумов в дискретном канале порождает дополнительную ошибку как в системе КИМ, так и в системе ДМ. Средний квадрат этой ошибки (ошибки декодирования) в стационарном канале без памяти пропорционален вероятности ошибочного приема элемента дискретного сигнала

$$\varepsilon_{II}^2 = k p_0\, \sigma_B^2\,, \qquad (6.26)$$

где коэффициент пропорциональности k зависит от типа кода и коэффициента корреляции сообщения.

Ошибки декодирования и ошибки квантования можно считать независимыми, и, следовательно, средний квадрат суммарной ошибки

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_I^2 + \varepsilon_{II}^2\,. \qquad (6.27)$$

Нормированный средний квадрат ошибки $\mathring{\varepsilon}^2$ (величина, обратная отношению *сигнал/шум* на выходе цифровой системы связи, $h^2{}_{\text{вых}}$)

$$\mathring{\varepsilon}^2 = \frac{1}{h_{\text{вых}}^2} = \frac{\varepsilon_I^2 + \varepsilon_{II}^2}{\sigma_b^2}\,. \qquad (6.28)$$

Ошибка декодирования ε^2_{II} зависит от отношения *сигнал/шум* в канале $h^2_{\text{вх}} = \left(\frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}}\right)_{\text{вх}}$. Пороговое отношение *сигнал/шум* в канале можно определить из уравнения

$$\frac{\varepsilon_I^2}{\sigma_b^2} + \frac{\varepsilon_{II}^2}{\sigma_b^2}\left(h^2_{\text{вх.пор}}\right) = \overset{\circ}{\varepsilon}{}^2_{\text{макс}}, \qquad (6.29)$$

где $\overset{\circ}{\varepsilon}{}^2_{\text{макс}}$ — максимально допустимая величина нормированной ошибки.

Соотношение (6.29) определяет нижнюю границу параметра $h^2_{\text{вх}}$. Разумная верхняя граница этого параметра $h^2_{\text{вх.верх}}$ для цифровых систем связи может быть определена из соотношения [23]

$$\varepsilon^2_{II}\left(h^2_{\text{верх}}\right) = \varepsilon^2_I, \qquad (6.30)$$

поскольку дальнейшее увеличение отношения *сигнал/шум* в канале не ведет к существенному увеличению точности оценки сообщения, так как ошибка квантования становится больше ошибки декодирования, обусловленной помехами в канале.

Задачи

6.3.1. Согласно экспериментальным данным усредненный коэффициент корреляции речи [2] $R_b(\tau) = \exp(-\rho|\tau|)\cos 2\pi f_0\tau$, где $\rho \approx 10^3$ Гц, $f_0 = 400$ Гц. Определить интервал квантования во времени сигнала речи $T_{\text{к}}$, требуя, чтобы $T_{\text{к}} = 10^{-2}\tau_{\text{к}}$, причем интервал корреляции $\tau_{\text{к}}$ определяется из условия $R_b(\tau_{\text{к}}) = 0{,}3$.

6.3.2. Определить нормированное значение среднего квадрата ошибки квантования $\overset{\circ}{\varepsilon}{}^2_I = \varepsilon^2_I/\sigma^2_b$ при передаче непрерывной случайной величины $(R_b(\tau) = 1)$ по системе КИМ, предполагая, что шаг квантования по уровням Δ намного меньше среднеквадратичного значения сообщения σ_b.

6.3.3. Непрерывное стационарное сообщение с коэффициентом корреляции $R_b(\tau) = e^{-\rho|\tau|}$ передается дискретными методами с интервалом квантования во времени $T_{\text{к}} = \frac{10^{-2}}{\rho}$, $T_{\text{к}} = \frac{10^{-3}}{\rho}$.

Показать, что

а) двухуровневая система с ДМ обеспечивает нормированный средний квадрат ошибки квантования $\overset{\circ}{\varepsilon}{}^2 =$

$=0{,}016$ (0,002), в то время как для системы с КИМ при числе уровней квантования $L \gg 1$ $\overset{\circ}{\varepsilon}{}^2 = 0{,}01$ (0,005);

б) при использовании безызбыточного кода система с КИМ занимает в канале в $\log_2 L$ раз бо́льшую полосу частот, чем система с ДМ при том же способе манипуляции и интервале квантования.

6.3.4. Показать, что в симметричном двоичном канале без памяти средний квадрат ошибки декодирования в системе КИМ при использовании n-разрядного примитивного кода для передачи равновероятных уровней двоичными сигналами равной энергии определяется формулой

$$\varepsilon_{II}^2 = 4\sigma_b^2\, p_0 \frac{1}{T} \int_0^T R_b^2(\tau)\, d\tau,$$

где p_0 — вероятность ошибочного приема элементарного символа.

6.3.5. Показать, что при передаче непрерывного сообщения с коэффициентом корреляции $R_b(\tau) = e^{-\rho|\tau|}$ средний квадрат ошибки декодирования в системе с ДМ в симметричном двоичном канале без памяти определяется формулой

$$\varepsilon_{II}^2 = \frac{4\sigma_b^2\, p_0\, [1 - e^{-2\rho T_к}]}{[1 - e^{-2\rho T_к}\, \overset{\circ}{\varepsilon}{}_0^2]\, 2\rho T_к},$$

если считать, что при ДМ сигнал, который подвергается квантованию, имеет дисперсию [2] $\dfrac{\sigma_b^2}{1 - \overset{\circ}{\varepsilon}{}_0^2 R_b^2(T_к)}$.

Убедиться в том, что для одного и того же сообщения и канала средний квадрат ошибки декодирования в системе с ДМ больше, чем для системы с КИМ, в $1/[1 - \overset{\circ}{\varepsilon}{}^2_0 R^2_b(T_к)]$ раз, если в обеих системах интервал квантования во времени одинаков.

6.3.6. В предположении передачи сообщений с коэффициентом корреляции $R_b(\tau) = e^{-\rho|\tau|}$ посредством КИМ с примитивным двоичным кодом по каналу с фазовой манипуляцией (на $\pm\pi/2$) и белым шумом выявить существование для каждого заданного отношения *сигнал/шум* в канале (заданного параметра $P_с/G_{ш}\rho$) оптимальных значений скорости передачи двоичных символов по каналу $v_и$ (параметра $v_и/\rho$) и числа уровней квантования L, при которых обеспечивается максимум отношения *сигнал/шум* на выходе приемника $h^2_{\text{вых}} = \sigma^2_b/\varepsilon^2$.

Задачу решить путем анализа графиков $h^2_{\text{вых}} = f\left[\frac{P_{\text{с}}}{G_{\text{ш}}\rho}, L, \frac{v_{\text{и}}}{\rho}\right]$.

6.3.7. В предположении передачи сообщений с коэффициентом корреляции $R_b(\tau) = e^{-\rho|\tau|}$ посредством двухуровневой ДМ и использовании таких же сигналов, как в предыдущей задаче, показать существование для каждого значения *сигнал/шум* в канале (параметра $P_{\text{с}}/G_{\text{ш}}\rho$) оптимального значения параметра $v_{\text{и}}/\rho$ (максимизирующего $h^2_{\text{вых}}$).

Задачу решить путем анализа графиков $h^2_{\text{вых}} = f\left(\frac{P_{\text{с}}}{G_{\text{ш}}\rho}, \frac{v_{\text{и}}}{\rho}\right)$.

6.3.8. Определить выигрыш (проигрыш) по отношению *сигнал/шум* на выходе приемника $h^2_{\text{вых}}$ системы с ДМ по сравнению с системой КИМ (см. задачи 6.3.6 и 6.3.7), предполагая в обеих системах фазовую манипуляцию в канале, неизменное отношение *сигнал/шум* в канале и выбор оптимальных значений скорости манипуляции $v_{\text{и}}$.

6.3.9. Считая допустимой величину нормированной ошибки $\mathring{\varepsilon}^2_{\text{макс}} = 0{,}01$, а интервал квантования во времени $T_{\text{к}} = 10^{-2}/\rho$, определить пороговое отношение *сигнал/шум* в канале $h^2_{\text{пор}}$ для системы с ДМ и фазовой манипуляцией при сообщении, сигнале и канале, оговоренных в задаче 6.3.7.

6.3.10. Исходя из условия (6.30), найти разумную верхнюю границу отношения *сигнал/шум* в канале $h^2_{\text{верх}}$ для системы с ДМ и фазовой манипуляцией, рассмотренной в задаче 6.3.9.

6.3.11. Найти зависимость выигрыша g и обобщенного выигрыша g' системы ДМ с фазовой манипуляцией от отношения *сигнал/шум* в канале $h^2_{\text{вх}} = \frac{P_{\text{с}}}{G_{\text{ш}}F_{\text{к}}}$, полагая, что сообщение характеризуется коэффициентом корреляции $R(\tau) = e^{-\rho|\tau|}$, интервал квантования во времени $T_{\text{к}} = 10^{-2}/\rho$.

Решения и ответы

Р.6.3.1. Исходя из условия $e^{-10^3\tau_{\text{к}}}\cos(2\pi 400\tau_{\text{к}}) = 0{,}3$, получаем $\tau_{\text{к}} \approx 1/\rho = 10^{-3}$ с, $T_{\text{к}} = 10^{-2}\tau_{\text{к}} = 10^{-5}$ с.

Р.6.3.2. Согласно (6.24) $\overset{\circ}{\varepsilon}{}^2_I = \frac{\varepsilon^2_I}{\sigma^2_b} = \overset{\circ}{\varepsilon}{}^2$. Если шаг квантования достаточно мал (по сравнению с σ), то при любом распределении сообщения в пределах интервала σ его можно считать равномерно распределенным. Тогда разность между истинным и ближайшим дискретным значениями сообщения (ошибка квантования ε) распределена равномерно с плотностью $w(\varepsilon) = 1/\Delta$, $-\Delta/2 < \varepsilon < \Delta/2$. Математическое ожидание ошибки $\overline{\varepsilon} = \int\limits_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \varepsilon w_1(\varepsilon)\, d\varepsilon = 0$. Дисперсия (средний квадрат) ошибки $\varepsilon^2_I = \int\limits_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \varepsilon^2 w_1(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{\Delta^2}{12}$.

Такая же дисперсия ошибки будет при равномерном квантовании случайной величины, равномерно распределенной на интервале $[-a, a]$ на $L = 2a/\Delta$ уровней, т. е. $\varepsilon^2{}_I = a^2/3L^2$. Дисперсия равномерно распределенной на интервале $[-a, a]$ случайной величины $\sigma^2{}_b = a^2/3$ или $\varepsilon^2{}_I = \sigma^2{}_b/L^2$. Таким образом, нормированный средний квадрат ошибки $\overset{\circ}{\varepsilon}{}^2{}_I = \overset{\circ}{\varepsilon}{}^2 = 1/L^2$. Этот результат при $\Delta \ll \sigma$ примерно справедлив и при произвольном распределении сообщения.

Р.6.3.3. Согласно (6.24) и с учетом Р.6.3.2 для системы КИМ при $L \gg 1$ имеем

$$\overset{\circ}{\varepsilon}{}^2_I = 1 - \frac{1 - \mathrm{e}^{-2\rho T}}{2\rho\, T}.$$

Согласно (6.25) для системы с ДМ

$$\overset{\circ}{\varepsilon}{}^2_I = 1 - \frac{\frac{3}{4}}{\left[1 - \frac{1}{4}\, \mathrm{e}^{-2\rho T}\right]} \frac{[1 - \mathrm{e}^{-2\rho T}]}{2\rho\, T}.$$

Положив $T = T_{\text{к}} = 10^{-2}/\rho$, и $T_{\text{к}} = 10^{-3}/\rho$, получим нужный результат. Этот результат говорит о том, что с уменьшением интервала квантования во времени качество системы с ДМ растет быстрее, чем при КИМ.

Сигнал в системе с ДМ занимает полосу частот $F_{\text{с}} = a/T_{\text{к}}$. Коэффициент $a > 1$ определяется видом манипуляции. В системе с КИМ на интервале $T_{\text{к}}$ надо передать $k=\log_2 L$ информационных посылок. Их длительность $\tau_{\text{и}} = \frac{T_{\text{к}}}{\log_2 L}$. Следовательно, сигнал КИМ занимает полосу частот $F_{\text{с}} = \frac{1}{T_{\text{к}}} a \log_2 L$.

Р.6.3.4. Средний квадрат ошибки декодирования при передаче непрерывного отсчета [2]

$$\varepsilon_{II}^2 = \sum_{j=1}^{L} \sum_{i=1}^{L} (b'_j - b_i)^2 P(b_i) P(b'_j/b_i),$$

где $P(b'_j/b_i)$ — вероятность передачи i-го уровня и принятия решения о передаче j-го.

При равномерном квантовании

$$b_i = b_{\text{мин}} + \frac{2i-1}{2} \Delta, \ i = 1, 2, \ldots, L.$$

Следовательно, $(b'_j - b_i)^2 = (j'-i)^2 \Delta^2$ и $\varepsilon^2_{II} = \Delta^2 \Sigma\Sigma (j' - i)^2 P(i) P(j'/i)$, где $P(j'/i)$ — вероятность передачи числа i и принятия решения о передаче числа j.

Запишем переданное и принятое числа i и j' в двоичном коде

$$i = \sum_{r=1}^{n} a_r 2^{r-1}; \ j' = \sum_{r=1}^{n} a'_r 2^{r-1},$$

где a_r, a'_r равно 0 или 1. Ошибка в оценке числа i $\Delta i = j' - i = \sum_{r=1}^{n} 2^{r-1} (a'_r - a_r)$ состоит из n независимых слагаемых (элементарных ошибок) $\Delta_r = 2^{r-1} (a'_r - a_r)$. Статистически усредняя ошибку Δ_r и ее квадрат по всевозможным комбинациям i и j', находим математическое ожидание $\overline{\Delta}_r$ и средний квадрат $\overline{\Delta}^2_r$:

$$\overline{\Delta}_r = 2^{r-1} (1' - 0) P_r(0) P_r(1'/0) + 2^{r-1} (0' - 1) P_r(1) P_r(0'/1) =$$
$$= 2^{r-1} [P_r(0) P_r(1'/0) - P_r(1) P_r(0'/1)];$$

$$\overline{\Delta_r^2} = 2^{2(r-1)} [(1-0)^2 P_r(0) P_r(1'/0) + (0-1)^2 P_r(1) P_r(0'/1)].$$

Средний квадрат результирующей ошибки $\overline{(\Delta i)^2}$ равен сумме дисперсий элементарных ошибок и квадрата математического ожидания результирующей ошибки:

$$\overline{(\Delta i)^2} = \sum_{r=1}^{n} [\overline{\Delta_r^2} - \overline{\Delta}_r^2] + \left(\sum_{r=1}^{n} \overline{\Delta_r} \right)^2.$$

При равной вероятности всех передаваемых чисел $P(i) = 1/L$ (уровней квантования) и примитивном коде априорные вероятности чисел 0 и 1 в различных разрядах независимы и равны $P(1) = P(0) = \frac{1}{2}$. При этом с учетом симметрии канала $(P_r(0/1) = P_r(1/0) = p_0)$ имеем $\overline{\Delta}_r = 0$ и

$$\varepsilon^2_{II} = \Delta^2\overline{(\Delta i)^2} = \Delta^2 p_0 \sum_{r=1}^{n} 2^{(r-1)} = \frac{\Delta^2 p_0}{3}(4^n - 1) = \frac{\Delta^2 p_0}{3}(L^2 - 1).$$

При передаче непрерывного сообщения с коэффициентом корреляции $R_b(\tau)$ и сглаживания полученных оценок сообщения с учетом этой корреляции (после независимого декодирования отдельных квантованных уровней сигнала) средний квадрат ошибки декодирования

$$\varepsilon^2_{II} = \frac{\Delta^2 p_0}{3}(L^2 - 1)\frac{1}{T}\int_0^T R^2_b(\tau)d\tau.$$

При $L^2 \gg 1$ находим, что $\varepsilon^2_{II} = 4\sigma^2_b \frac{p_0}{T}\int_0^T R^2_b(\tau)\,d\tau$ при $\sigma =$ $= \frac{L^2\Delta^2}{12}$ (см. Р.6.3.2).

Р.6.3.5. Нужный результат следует из Р.6.3.4, где $\sigma^2{}_b$ следует заменить на $\frac{\sigma^2_b}{1 - \overset{\circ}{\varepsilon}{}^2_0 R^2_b(T)}$.

Поскольку $\overset{\circ}{\varepsilon}{}^2{}_0 R^2{}_b(\tau) < 1$, то отсюда же следует вывод о том, что система с КИМ обеспечивает при неизменном интервале квантования $T_к$ выигрыш по среднему квадрату ошибки декодирования по сравнению с системой с ДМ в $\frac{1}{1 - \overset{\circ}{\varepsilon}{}^2_0 R^2_b(\tau)}$ раз. Если однако цифровая система связи работает в условиях $\varepsilon^2{}_{II} \ll \varepsilon^2{}_I$ (определяющей является ошибка квантования), то лучшее качество при соответствующем интервале квантования во времени $T_к$ обеспечивает система с ДМ (см. Р.6.3.3).

Р.6.3.6. Имея в виду, что $v_и = 1/\tau_и = \log_2 L/T_к$ и что для двоичной системы с противоположными сигналами при оптимальном приеме в канале с белым шумом

$$p_0=\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\sqrt{\frac{2P_c\,\tau_и}{G_ш}}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\sqrt{\frac{2P_c}{G_ш\,\rho}\,\frac{\rho}{v_и}}\right)\right],$$

и учитывая Р.6.3.2, Р.6.3.3 и Р.6.3.4, можно написать

$$h^2_{вых}=\frac{\sigma_b^2}{\varepsilon^2}=$$

$$=\frac{1}{\dfrac{1-e^{-2\rho\frac{\log_2 L}{v_и}}}{2\dfrac{\log_2 L}{v_и}\rho}\left\{L^2-1+2\left[1-\Phi\left(\sqrt{\dfrac{P_c}{G_ш\,\rho}\,2\,\dfrac{\rho}{v_и}}\right)\right]\right\}+1}.$$

Анализ этого выражения показывает, что для заданного параметра $P_c/G_ш\rho$ величина $h^2{}_{вых}$ достигает максимума при определенном (оптимальном) значении $v_и/\rho$, причем максимум максиморум достигается при некотором (оптимальном) значении L. На рис. 6.9 построена интересующая нас зависимость при $P_c/G_ш\rho=500$ [2], иллюстрирующая сказанное. На рис. 6.10 построена зависимость максимального значения $h^2{}_{вых}$, оптимальных значений $v_и/\rho$ и L от отношения *сигнал/шум* в канале $P_c/G_ш\rho$, взятая из [2]. Из рисунка видно, например, что при $P_c/G_ш\rho=10^3$ оптимальное значение $L=32$, $v_и/\rho=$ $=200$ и $h^2{}_{вых}=20$.

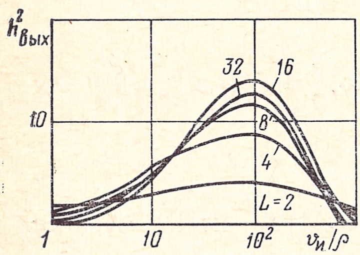


Рис. 6.9. Зависимость отношения *сигнал/шум* на выходе системы КИМ от величины $v_и/\rho$ при различном числе уровней квантования

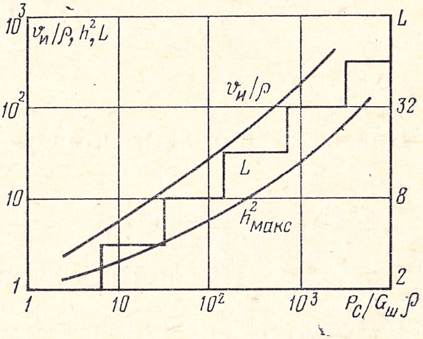


Рис. 6.10. Зависимость максимальной величины $h^2{}_{вых}$ и оптимальных значений $v_и/\rho$ и L от $P_c/G_ш\rho$ для системы КИМ

Р.6.3.7. Для системы с ДМ $v_и = 1/T$. Пользуясь тем же подходом, как и при решении предыдущей задачи, и учитывая Р.6.3.3 и Р.6.3.5, получаем

$$h^2_{вых} = \frac{1}{1 - \dfrac{1 - e^{-\frac{2\rho}{v_и}}}{1 - 0{,}25 e^{-\frac{2\rho}{v_и}}} \left\{0{,}75 - 2\left[1 - \Phi\left(\sqrt{\dfrac{2P_c}{G_ш\rho}\dfrac{\rho}{v_и}}\right)\right]\dfrac{v_и}{2\rho}\right\}}.$$

На рис. 6.11 построена зависимость $h^2_{вых}$ от $v_и/\rho$ при различных значениях параметра $P_c/G_ш\rho$, откуда следует существование оптимальных соотношений между параметрами.

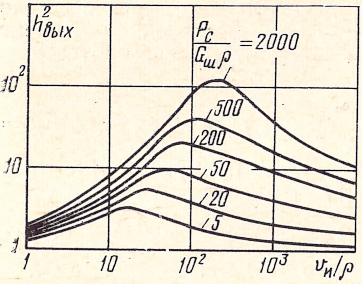


Рис. 6.11. Зависимость отношения *сигнал/шум* на выходе системы ДМ от величины $v_и/\rho$

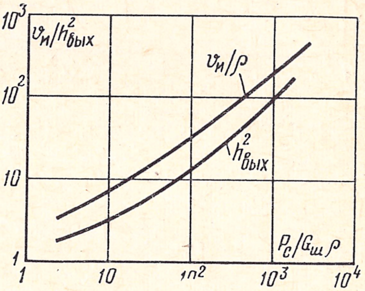


Рис. 6.12. Зависимость максимальной величины $h^2_{вых}$ и оптимальной величины $v_и/\rho$ от $P_c/G_ш\rho$ для системы ДМ

На рис. 6.12 дана зависимость максимального значения $h^2_{вых}$ и оптимальных значений $v_и/\rho$ от $P_c/G_ш\rho$, взятая из [2]. Из рисунка видно, например, что при $\frac{P_c}{G_ш\rho} = 10^3$ оптимальное значение $v_и/\rho \approx 200$, а $h^2_{вых} = 100$.

Р.6.3.8. Из сопоставления кривых рис. 6.9 и 6.11 следует, что для сравниваемых систем оптимальные значения $v_и$ (скорости манипуляции в двоичном канале) при заданном значении $h^2_{вх}$ примерно равны.

Следовательно, при работе в той же полосе частот канала интервал квантования сообщения во времени при КИМ в $\log_2 L$ раз больше, чем при ДМ. Зависимость $10\lg(h^2_{вых\,ДМ}/h^2_{вых\,КИМ})$ от $P_c/G_ш\rho$ по данным рис. 6.10 и 6.12 дана на рис. 6.13.

Система с ДМ обеспечивает в канале с малым шумом ($P_с/G_{ш}\rho > 10^2$) выигрыш по параметру $h^2_{вых}$ на 4,2 дБ. При сильном шуме в канале ($P_с/G_{ш}\rho \to 1$) система КИМ и система ДМ эквивалентны.

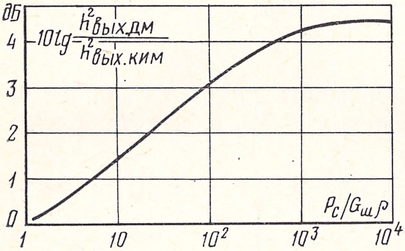


Рис. 6.13. Зависимость энергетического выигрыша перехода от системы КИМ к системе ДМ от величины $P_с/G_{ш}\rho$

Р.6.3.9. Пользуясь (6.29), Р.6.3.7 и считая $F_к = 2/T_к$, определяем $h^2_{пор} = \left(\frac{P_с}{G_ш F_к}\right)_{пор}$ из уравнения

$$\Phi\left(\sqrt{4h^2_{пор}}\right) = 1 - \frac{0,75\left(1 - e^{-2\rho T}\right) - (1 - \overset{\circ}{\varepsilon}_{макс})\left(1 - 0,25e^{-2\rho T}\right)}{2\left(1 - e^{-2\rho T}\right)} - 2\rho T.$$

При $T_к = \frac{10^{-2}}{\rho}$ имеем $\Phi\left(\sqrt{4h^2_{пор}}\right) = 0,9985$. Откуда, пользуясь таблицами функции Крампа, находим $h^2_{пор} = 2,51$.

Р.6.3.10. Пользуясь (6.30), Р.6.3.3 и Р.6.3.5, определяем $h^2_{верх} = \left(\frac{P_с}{G_ш F_к}\right)_{верх}$ из уравнения

$$\Phi\left(\sqrt{4h^2_{верх}}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{2\rho T\left(1 - 0,25e^{-2\rho T}\right)}{1 - e^{-2\rho T}} - 0,75\right].$$

При $T_к = 10^{-2}/\rho$ имеем $\Phi\left(\sqrt{4h^2_{верх}}\right) = 0,9998$. Откуда следует $h^2_{верх} = 3,46$. Обратим внимание на то, что для системы с ДМ $h^2_{верх}/h^2_{пор} = 1,4$.

Р.6.3.11. Расчетная формула следует из Р.6.3.7 и имеет вид

$$g = \frac{h^2_{вых}}{h^2_{вх}} = \frac{1}{h^2_{вх}\left\{1 - \frac{1 - e^{-2\rho T_к}}{1 - 0,25e^{-2\rho T_к}}\left[0,75 - 2\left(1 - \Phi\left(\sqrt{4h^2_{вх}}\right)\right)\right]\frac{1}{2\rho T_к}\right\}}.$$

В табл. 6.2 дана зависимость g и g' от $h^2_{вх}$ при $T_к = 10^{-2}/\rho$. Параметр $h^2_{вх}$ определен в границах $h^2_{пор}$, $h^2_{верх}$ (см. Р.6.3.9 и Р.6.3.10).

6.4. Оптимальная и субоптимальная фильтрация непрерывных сигналов

Одной из задач приема непрерывных сигналов является выделение полезного сигнала $s'(t)$ с помощью некоторого фильтра из смеси $z(t)=s'(t)+u(t)$, причем сигнал и аддитивный шум считаются независимыми стационарными случайными процессами с известными энергетическими спектрами $G_{s'}(f)$ и $G_u(f)$.

ТАБЛИЦА 6.2

$h^2_{вх}$	2,51	2,75	2,99	3,23	3,46
g	37,6	40,4	42,0	41,7	40,4
g'	0,620	0,667	0,693	0,688	0,667

Выделение сигнала $s'(t)$ в неискаженном виде невозможно. Можно, однако, найти такое преобразование L для сигнала, при котором преобразованный сигнал $y(t)=L[z(t)]$ окажется в определенном смысле близким к реализации сигнала $s'(t-t_0)$, где t_0 — некоторая известная задержка сигнала во времени. В качестве критерия близости сигналов $s'(t-t_0)$ и $y(t)$ часто принимают критерий минимума среднеквадратичной ошибки

$$\min \overline{E^2} = \overline{\min [L[z(t)] - s'(t-t_0)]^2}. \tag{6.31}$$

Фильтр, обеспечивающий минимум среднеквадратичной ошибки при линейном преобразовании $L[z(t)]$, называется оптимальным фильтром Колмогорова — Винера. Комплексный коэффициент передачи такого фильтра определяется соотношением

$$\mathrm{K}_0(f) = \frac{G_{s'}(f)}{G_{s'}(f) + G_u(f)} e^{-i 2\pi f t_0}. \tag{6.32}$$

Если известна форма принимаемого финитного (ограниченного во времени) сигнала $s'(t)$, то может быть построен линейный оптимальный фильтр, максимизирующий отношение пиковой мощности сигнала к средней мощности шума. Такой фильтр называют согласованным с сигналом $s'(t)$.

На практике часто при приеме одиночных импульсов на фоне белого шума вместо оптимальных согласованных фильтров используются квазиоптимальные линейные фильтры, форма частотных характеристик которых заранее задана, а максимум отношения *сигнал/шум* достигается лишь соответствующим подбором полосы пропускания.

Задачи

6.4.1. Показать, что комплексный коэффициент передачи линейного фильтра, оптимального по критерию минимума среднеквадратичной ошибки, определяется соотношением (6.32).

6.4.2. Показать, что энергетические спектры сигнала ошибки, полезного сигнала и шума на выходе фильтра Колмогорова — Винера определяются выражениями:

$$G_{\text{E}}(f) = \frac{G_{s'}(f)\,G_u(f)}{G_{s'}(f) + G_u(f)}\,; \quad G_{ys'}(f) = \frac{G^3_{s'}(f)}{[G_{s'}(f) + G_u(f)]^2}\,;$$

$$G_{y_u}(f) = \frac{G^2_{s'}(f)\,G_u(f)}{[G_{s'}(f) + G_u(f)]^2}\,.$$

6.4.3. Энергетические спектры напряжений сигнала и аддитивного шума определены на положительных частотах соотношениями:

$$G_{s'}(f) = \begin{cases} \dfrac{A}{F}\,f & \text{при } 0 < f \leqslant F, \\ 0 & \text{при } f > F; \end{cases}$$

$$G_u(f) = \begin{cases} A - \dfrac{A}{F}\,f & \text{при } 0 < f < F, \\ 0 & \text{при } f > F. \end{cases}$$

Определить коэффициент передачи (модуль) оптимального фильтра Колмогорова — Винера и найти энергетические спектры сигнала ошибки, полезного сигнала и шума на выходе фильтра, средние мощности трех этих компонент, а также параметр $h^2_{\text{вых}}$ (отношение *сигнал/шум*).

6.4.4. Сигнал и шум, энергетические спектры которых даны в предыдущей задаче, поступают на идеальный фильтр нижних частот с амплитудно-частотной характеристикой

$$K(f) = \begin{cases} 0 < K_0 \leqslant 1 & \text{при } 0 < f \leqslant F, \\ 0 & \text{при } f > F. \end{cases}$$

Найти средний квадрат ошибки и отношение средних мощностей сигнала и шума $h^2_{\text{вых}} = \overline{y^2}_{s'}/\overline{y^2}_u$ на выходе этого фильтра. Сопоставить эти параметры с соответствующими параметрами оптимального фильтра.

6.4.5. Показать, что максимальное отношение пиковой мощности сигнала к средней мощности шума r^2 на выходе линейного фильтра с постоянными параметрами определяется соотношением $r^2_{\text{макс}} = h^2_{\text{вх}}\,2F_{\text{к}}T_{\text{с}}$ при воздействии на его вход сигнала $s'(t)$ известной формы с длительностью $T_\text{с}$ и полосой $F_\text{к}$ и аддитивного белого шума и обеспечивается согласованным фильтром. Здесь $h^2_\text{вх}$ — отношение средних мощностей сигнала и шума на входе фильтра в полосе сигнала.

6.4.6. Прямоугольный видеоимпульс $s'(t)$ длительности $\tau_\text{и}$ имеет случайную амплитуду γ и случайное положение во времени Δ в тактовом интервале $(0, T_\text{с})$

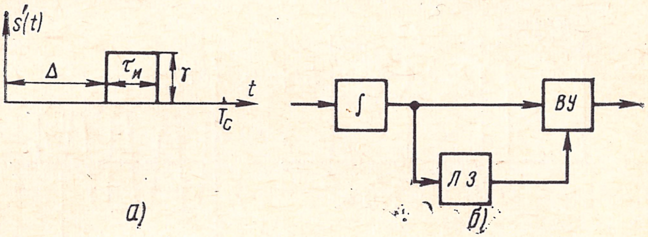


Рис. 6.14. Прямоугольный импульс *(а)* и согласованный с ним фильтр *(б)*

(рис. 6.14*а*), т. е. соответствует сигналу АИМ или ФИМ. Сигнал $s'(t)$ принимается на фоне белого шума $U(t)$ с интенсивностью $G_\text{ш}$ так, что анализируемое колебание $z(t)=s'(t)+u(t)$.

Показать, что а) согласованный с сигналом $s'(t)$ фильтр СФ может быть реализован посредством линейной схемы, содержащей три блока: интегратор, линию задержки на время $\tau_\text{и}$ и вычитающее устройство (рис. 6.14*б*); б) оптимальная по критерию максимального правдоподобия оценка амплитуды сигнала γ^* может быть получена по максимуму сигнала на выходе СФ независимо от значения $0\leqslant\Delta\leqslant T_\text{с}-\tau_\text{и}$; в) оптимальная оценка положения фронта импульса может быть получена по моменту времени достижения максимума сигнала на выходе СФ независимо от значения амплитуды γ; г) отношение пикового значения сигнала к средней мощности шума на выходе СФ $r^2 = 2\gamma^2\tau_\text{и}/G_\text{ш}$.

6.4.7. Показать, что фильтр, согласованный с радиоимпульсом, имеющим прямоугольную огибающую, частоту заполнения $f_0=\omega_0/2\pi$ и длительность $\tau_\text{и}$, при $t_0=\tau_\text{и}$ и $\dfrac{\omega_0\tau_\text{и}}{2\pi}=n$ (n — целое число) имеет комплексный коэффициент передачи

$$\mathbf{K}(f)=\frac{a}{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)}\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau_\text{э}}\right).$$

Как можно реализовать такой фильтр?

6.4.8. Найти отношение пиковой мощности сигнала к средней мощности шума на выходе идеального полосового фильтра с полосой $\Delta f = f_2 - f_1$ [f_1, f_2 — граничные частоты полосы (рис. 6.15*а*)], на вход которого поступают прямоугольный радиоимпульс с амплитудой U_m, длительностью $\tau_и$ и частотой заполнения $f_0 = (f_2 + f_1)/2$ (рис. 6.15*б*) и нормальный белый шум с равномерной спектральной плотностью, и показать, что оно меньше, чем на выходе согласованного фильтра, если $\Delta f \tau_и > 1$.

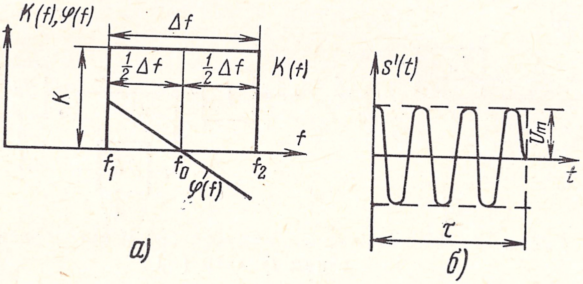


Рис. 6.15. Частотные характеристики идеального полосового фильтра (*а*) для прямоугольного радиоимпульса (*б*)

6.4.9. Определить полосу пропускания идеального полосового фильтра (см. задачу 6.4.8), при которой достигается максимум отношения пиковой мощности сигнала к средней мощности шума. Показать, что выигрыш в отношении *сигнал/шум*, который обеспечивает фильтр, согласованный с прямоугольным радиоимпульсом, по сравнению с квазиоптимальным идеальным полосовым фильтром равен при приеме одиночных импульсов всего лишь 0,86 дБ.

Решения и ответы

Р.6.4.1. Комплексный коэффициент передачи произвольного линейного фильтра с постоянными параметрами можно представить в виде

$$\mathbf{K}(f) = K(f)\, e^{i\varphi(f)},$$

где $K(f)$ — амплитудно-частотная характеристика фильтра; $\varphi(f)$ — его фазо-частотная характеристика.

Составим выражение для среднеквадратичной ошибки

$$\overline{\mathrm{E}^2} = \overline{\{L[Z(t)] - s'(t-t_0)\}^2}.$$

При стационарности и независимости принимаемого сигнала $s'(t)$ и шума в канале $u(t)$ можно записать

$$\overline{\mathrm{E}^2} = \overline{\{L[s'(t)] - s'(t-t_0)\}^2} + \overline{\{L[U(t)]\}^2} = \overline{\mathrm{E}^2_{s'}} + \overline{\mathrm{E}^2_u}.$$

Первое слагаемое представляет собой средний квадрат ошибки, обусловленной прохождением сигнала через фильтр, второе — средний квадрат ошибки, обусловленной прохождением шума.

Чтобы величина $\overline{\mathrm{E}^2_{s'}}$ была минимальной, фазо-частотная характеристика фильтра должна быть линейной: $\varphi(f) = -2\pi f t_0$, что является необходимым условием отсутствия искажений формы сигнала. Сигнал ошибки, обусловленный прохождением шума через фильтр, не зависит от фазовых соотношений и имеет энергетический спектр

$$G_{\mathrm{E}_u}(f) = K^2(f)\, G_u(f).$$

Сигнал ошибки $\varepsilon_{s'} = L[s'(t)] - s'(t-t_0)$ имеет преобразование Фурье $\mathbf{S}_{\varepsilon_{s'}}(f) = \mathbf{K}(f)\mathbf{S}_s(f) - \mathbf{S}_s(f)e^{-i\omega t_0}$, где $\mathbf{S}_s(f) = S_s(f)e^{i\varphi_s(f)}$ — комплексный спектр сигнала $s'(t)$. Если фазо-частотная характеристика фильтра линейна $\varphi(f) = -2\pi f t_0$, то

$$\mathbf{S}_{\varepsilon_{s'}}(f) = \mathbf{S}_{s'}(f)\, e^{-i\, 2\pi f t_0}\, [K(f) - 1].$$

Следовательно, энергетический спектр сигнала ошибки, обусловленной прохождением сигнала, $G_{\mathrm{E}_{s'}}(f) = G_{s'}(f)[K(f) - 1]^2$, а энергетический спектр результирующей ошибки

$$G_{\mathrm{E}}(f) = G_{\mathrm{E}_{s'}}(f) + G_{\mathrm{E}_u}(f) = G_{s'}(f)[1 - K(f)]^2 + G_u(f)K^2(f).$$

Величина $K(f)$ должна быть такой, чтобы спектральная плотность ошибки была минимальной на произвольной частоте, что предполагает выполнение условия[1]

$$\frac{\partial\{G_{\mathrm{E}}\}}{\partial K} = -2G_{s'}(f)[1 - K_0(f)] + 2K_0(f)\, G_u(f) = 0.$$

---

[1] Легко проверить, что корень этого уравнения определяет минимум $G_{\mathrm{E}}(f)$.

Отсюда находим амплитудно-частотную характеристику оптимального фильтра Колмогорова — Винера

$$K_0(f) = \frac{G_{s'}(f)}{G_{s'}(f) + G_u(f)}.$$

Поскольку фазовая характеристика фильтра должна быть линейной, получаем для комплексного коэффициента передачи фильтра Колмогорова — Винера требуемый результат.

Р.6.4.2. Воспользуемся полученным в Р.6.4.1 соотношением для энергетического спектра сигнала ошибки на выходе фильтра Колмогорова — Винера

$$G_{\text{E}}(f) = G_{s'}(f)\,[1 - K_0(f)]^2 + G_u(f)\,K_0^2(f).$$

Подставляя сюда выражение для амплитудно-частотной характеристики

$$K_0(f) = \frac{G_{s'}(f)}{G_u(f) + G_{s'}(f)},$$

находим

$$G_{\text{E}}(f) = G_{s'}(f)\left[1 - \frac{G_{s'}(f)}{G_u(f) + G_{s'}(f)}\right]^2 + G_u(f)\frac{G_{s'}^2(f)}{[G_u(f) + G_{s'}(f)]^2} =$$

$$= \frac{G_{s'}(f)\,G_u(f)}{G_u(f) + G_{s'}(f)}.$$

Энергетический спектр полезного сигнала и шума на выходе фильтра:

$$G_{y_{s'}}(f) = G_{s'}(f)\,K_0^2(f) = \frac{G_{s'}^3(f)}{[G_u(f) + G_{s'}(f)]^2};$$

$$G_{y_u}(f) = G_u(f)\,K_0^2(f) = \frac{G_{s'}^2(f)\,G_u(f)}{[G_{s'}(f) + G_u(f)]^2}.$$

Р.6.4.3. Согласно (6.32) коэффициент передачи оптимального фильтра

$$K_0(f) = \begin{cases} \dfrac{f}{F} & \text{при } 0 < f \leqslant F, \\ 0 & \text{при } f > F. \end{cases}$$

Согласно Р.6.4.2 энергетические спектры в полосе (0, F равны: для сигнала ошибки $G_{\text{E}}(f) = A\left(\frac{f}{F} - \frac{f^2}{F^2}\right)$;

для полезного сигнала $G_{y_s}(f) = A\dfrac{f^3}{F^3}$; для шума $G_{y_u}(f) = A\left(\dfrac{f^2}{F^2} - \dfrac{f^3}{F^3}\right)$.

Средняя мощность сигнала ошибки

$$\overline{\mathrm{E}^2} = \int_0^F G_E(f)df = \frac{AF}{6}.$$

Средняя мощность полезного сигнала

$$\overline{y^2_{s'}} = \int_0^F G_{y_{s'}}(f)df = \frac{AF}{4}.$$

Средняя мощность шума

$$\overline{y^2_u} = \int_0^F G_{y_u}(f)\,df = \frac{AF}{12};\ h^2_{\text{вых}} = 3.$$

Р.6.4.4. Согласно Р.6.4.1 в полосе $(0, F)$ энергетический спектр сигнала ошибки

$$G_{\mathrm{E}}(f) = G_{s'}(f)[1-K(f)]^2 + G_u(f)K^2(f) = (1-K_0)^2\frac{A}{F}f + $$
$$+ K_0^2 A\left(1 - \frac{f}{F}\right).$$

Дисперсия сигнала ошибки

$$\overline{\mathrm{E}^2} = \frac{AF}{2}[(1-K_0)^2 + K_0^2].$$

При $K_0 = 0{,}5$ $\overline{\mathrm{E}^2} = \dfrac{AF}{4}$ (это минимальное значение), что в 1,5 раза больше, чем для оптимального фильтра. Легко показать, что $h^2{}_{\text{вых}} = \bar{y}^2{}_{s'}/\bar{y}^2{}_u = 1$. Эта величина в 3 раза меньше, чем для оптимального фильтра.

Р.6.4.5. Пусть линейный фильтр имеет комплексный коэффициент передачи $\mathbf{K}(f) = K(f)\exp(i\varphi(f))$.

При подаче на вход такого фильтра сигнала $s'(t)$ известной формы с комплексным спектром $\mathbf{S}(f) = S(f) \times e^{i\theta(f)}$ для отклика фильтра получим

$$\mathbf{s}_{\text{вых}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)\,K(f)\exp\{\mathrm{i}\,[\omega t + \theta(f) + \varphi(f)]\}\,df.$$

Если спектральная плотность белого шума на входе фильтра $G_{\text{ш}}$, то средняя мощность шума на выходе

$$P_{\text{ш.вых}}=\frac{G_{\text{ш}}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}K^2(f)\,df.$$

Предполагая, что пик полезного сигнала на выходе наблюдается в некоторый момент t_0, запишем

$$s(t_0)_{\text{вых}}=\int_{-\infty}^{\infty}S(f)\,K(f)\exp\{\mathrm{i}\,[\omega t_0+\theta(f)+\varphi(f)]\}\,df.$$

Отношение пиковой мощности сигнала и средней мощности шума

$$r^2=\frac{|s(t_0)|^2_{\text{вых}}}{P_{\text{ш.вх}}}=\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty}S(f)K(f)\exp\{\mathrm{i}\,[\omega t_0+\theta(f)+\varphi(f)]\}\,df\right|^2}{\frac{G_{\text{ш}}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}K^2(f)\,df}.$$

Найдем максимум этой величины. Для этого воспользуемся неравенством Буняковского — Шварца [15]:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)\,f_2(x)\,dx\right|\leqslant\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|f_1(x)|^2\,dx}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|f_2(x)|^2\,dx},$$

причем равенство достигается при $f_2(x)=af_1(x)$, a—постоянная.

Примем $f_1(x)=S(f)\exp\{\mathrm{i}[\omega t_0+\theta(f)+\varphi(f)]\}$, $f_2(x)=K(f)$.

С учетом неравенства Буняковского — Шварца имеем

$$r^2\leqslant\frac{\int_{-\infty}^{\infty}S^2(f)\,df\int_{-\infty}^{\infty}K^2(f)\,df}{\frac{G_{\text{ш}}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}K^2(f)\,df}=\frac{2}{G_{\text{ш}}}\int_{-\infty}^{\infty}S^2(f)\,df,$$

где $\int_{-\infty}^{\infty}S^2(f)df=E_{\text{c}}=P_{\text{c}}T$ — энергия сигнала. Поэтому

$$r^2\leqslant\frac{2E_{\text{c}}}{G_{\text{ш}}}=\frac{2P_{\text{c}}T}{G_{\text{ш}}}=r^2_{\text{макс}},\quad r^2_{\text{макс}}=2h_0^2=\frac{2P_{\text{c}}TF_{\text{к}}}{G_{\text{ш}}F_{\text{к}}}=h^2_{\text{вх}}2F_{\text{к}}T.$$

Величина r^2 достигает максимума при $f_2(x)=af_1(x)$ или при

$$K(f)=aS(f)\exp\{\mathrm{i}\,[\omega\, t_0+\theta(f)+\varphi(f)]\}.$$

Но это возможно лишь при $K_0(f)=aS(f)$ и $\omega t_0+\theta(f)+\varphi(f)=0$, т. е. при $\varphi_0(f)=-\theta(f)-\omega_0 t$. Это означает, что комплексный коэффициент передачи оптимального фильтра

$$\mathbf{K}_0(f)=aS(f)\exp[\mathrm{i}\,\varphi_0(f)]=aS(f)\exp\{-\mathrm{i}[\theta(f)+\omega\, t_0]\}=$$
$$=a\mathbf{S}(-f)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0},$$

где $\mathbf{S}(-f)$ — комплексно-сопряженный спектр сигнала $s(t)$. Фильтр с таким комплексным коэффициентом передачи называют согласованным с сигналом $s(t)$ (см. § 5.2).

Р.6.4.6. Комплексный спектр заданного сигнала

$$\mathbf{S}(f)=\gamma\int\limits_{\Delta}^{\Delta+\tau_{\text{и}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,dt=\frac{\gamma\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\Delta}}{\mathrm{i}\,\omega}\left[1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau_{\text{и}}}\right].$$

Коэффициент передачи согласованного фильтра

$$\mathbf{K}(f)_{\text{с.ф}}=a\mathbf{S}(-f)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}=\frac{a\gamma}{\mathrm{i}\,\omega}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(\tau_{\text{и}}+\Delta)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\Delta}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}.$$

Потребуем $t_0=\tau_{\text{и}}+\Delta$ или получения пикового значения сигнала на выходе фильтра в момент окончания входного сигнала [если Δ меняется в пределах $(0,\ T_{\text{с}}-\tau_{\text{и}})$, то t_0 меняется в пределах $(\tau_{\text{и}},\ T_{\text{с}})$]. Тогда

$$\mathbf{K}(f)_{\text{с.ф}}=\frac{a\gamma}{\mathrm{i}\,\omega}\left[1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau_{\text{и}}}\right].$$

Фильтр с такой передаточной функцией реализуется схемой рис. 6.14*б*.

Согласно Р.6.1.1 максимально правдоподобная оценка амплитуды видеоимпульса на фоне белого шума пропорциональна величине

$$k=\gamma\int\limits_{\Delta}^{\Delta+\tau_{\text{и}}}z(t)\,dt.$$

Эта величина определяется напряжением на выходе согласованного фильтра в момент t_0 окончания сигнала на входе. Согласно свойству согласованного фильтра в этот момент его выходное напряжение максимально. Следовательно, по максимуму этого напряжения можно получить оптимальную оценку амплитуды независимо от значения задержки Δ.

Оптимальная оценка положения фронта видеоимпульса Δ должна максимизировать величину

$$k_1 = \frac{2\gamma}{G_{\text{ш}}} \int\limits_{\Delta}^{\Delta+\tau_{\text{и}}} z(t) dt - \frac{\gamma^2}{G_{\text{ш}}} .$$

Для любого значения γ величина k_1 максимизируется, если максимально $k = \int\limits_{\Delta}^{\Delta+\tau_{\text{и}}} z(t) dt$. По моменту наблюдения максимума этой величины $t_{\text{макс}}$ можно найти оптимальную оценку $\Delta^* = t_{\text{макс}} - t_{\text{и}}$. Параметр r^2 на выходе согласованного фильтра равен $r^2 = 2h_0^2 = 2\frac{P_{\text{с}}\tau_{\text{и}}}{G_{\text{ш}}} = \frac{2\gamma^2\tau_{\text{и}}}{G_{\text{ш}}}$.

Р.6.4.7. Радиоимпульс, для которого будем искать коэффициент передачи согласованного фильтра, изображен на рис. 6.16*а*.

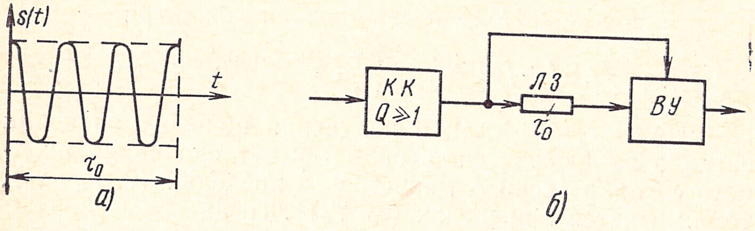


Рис. 6.16. Прямоугольный радиоимпульс (*а*) и согласованный с ним фильтр (*б*)

Найдем спектральную плотность этого сигнала

$$\mathbf{S}(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s'(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} dt = \int\limits_{0}^{\tau_0} \cos\omega_0 t\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} dt .$$

Воспользовавшись соотношением $\cos\omega_0 t = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}}{2}$, при определении спектра только по положительным частотам получим

$$\mathbf{S}_0(f) = \frac{1}{\mathrm{i}(\omega - \omega_0)} [1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)\tau_0}].$$

Комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра

$$\mathbf{K}_0(f)_{\text{с.ф}} = a\,\mathbf{S}_0(-f)\,e^{-i\,\omega t_0} = \frac{a}{i\,(\omega - \omega_0)}\left[e^{i\omega(\tau_0 - t_0)} \times\right.$$

$$\left.\times\, e^{-i\,\omega_0\tau_0} - e^{-i\omega t_0}\right].$$

Если $\frac{\omega_0\tau_0}{2\pi} = n$, то $e^{-i\omega_0\tau_0} = e^{-i2n\pi} = 1$. Выбирая $\tau_0 = t_0$, получаем

$$\mathbf{K}_0(f)_{\text{с.ф}} = \frac{a}{i\,(\omega - \omega_0)}\left[1 - e^{-i\omega\tau_0}\right].$$

Комплексный коэффициент передачи $\frac{a}{i(\omega - \omega_0)}$ можно получить, используя высокодобротный колебательный контур, а множитель $e^{-i\omega\tau_0}$ — с помощью линии задержки на время τ_0. Структурная схема фильтра, согласованного с радиоимпульсом, показана на рис. 6.16*б*.

Р.6.4.8. Для решения задачи воспользуемся теоремой об огибающей [21], в соответствии с которой огибающая выходного сигнала системы с симметричной относительно частоты f_0 частотной характеристикой совпадает с откликом эквивалентного фильтра нижних частот, если на его вход подать огибающую заданного сигнала.

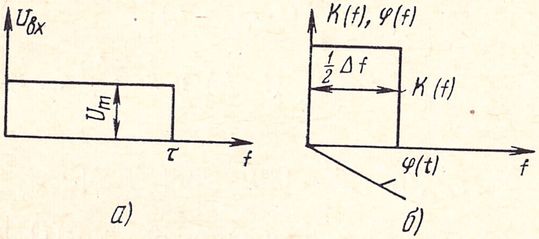


Рис. 6.17. Огибающая прямоугольного радиоимпульса (*а*) и частотная характеристика идеального ФНЧ (*б*)

Рассмотрим прохождение огибающей радиоимпульса (рис. 6.17*а*) через идеальный ФНЧ с частотными характеристиками $K'(f)$ и $\varphi(f)$ (рис. 6.17*б*).

Заменим импульс, показанный на рис. 6.17*а* разностью двух ступенчатых функций: $U_m 1(t)$ и $U_m 1(t - \tau_и)$.

Отклик фильтра на эти функции можно записать так:

$$s'_{\text{вых}}(t) = U_m \int\limits_0^{\Delta f/2} \frac{1}{\mathrm{i}\,\omega} K\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t_0)}\,df =$$

$$= \frac{1}{2} KU_m \left[1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{Si} \frac{\Delta\omega}{2}(t-t_0)\right];$$

$$s''_{\text{вых}}(t) = -U_m \int\limits_0^{\Delta f/2} \frac{1}{\mathrm{i}\,\omega} K^{-\mathrm{i}\omega(t-t_0+\tau_{\text{и}})}\,df = -$$

$$= -\frac{1}{2} KU_m \left[1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{Si} \frac{\Delta\omega}{2}(t-\tau_{\text{и}}-t_0)\right].$$

Здесь $\operatorname{Si} z = \int\limits_0^z \frac{\sin x}{x}\,dx$ — интегральный синус; $t_0 = \frac{\varphi(f)}{2\pi f}$ — время запаздывания.

Отклик фильтра на прямоугольный импульс

$$s_{\text{вых}}(t) = s'_{\text{вых}}(t) + s''_{\text{вых}}(t) = \frac{2KU_m}{\pi}\left[\operatorname{Si}\frac{\Delta\omega}{2}(t-t_0) - \right.$$

$$\left. - \operatorname{Si}\frac{\Delta\omega}{2}(t-\tau_{\text{и}}-t_0)\right].$$

Вводя обозначения $z = \frac{\Delta\omega}{2}(t-t_0)$ и $x = \frac{\Delta\omega}{2}\tau_{\text{и}}$, можно записать

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{KU_m}{\pi}[\operatorname{Si} z - \operatorname{Si}(z-x)].$$

Найдем величину z, при которой $s_{\text{вых}}(t)$ достигает максимума из условия $\frac{\partial}{\partial z}[\operatorname{Si} z - \operatorname{Si}(z-x)] = 0$. Это уравнение можно привести к виду

$$\frac{\sin z}{z} - \frac{\sin(z-x)}{z-x} = 0,$$

решением которого является $z = x/2$, что соответствует моменту $t = t_0 + \tau_{\text{и}}/2$. Пиковое значение отклика

$$s'_{\text{макс}}(t) = \frac{KU_m}{\pi}\left[\operatorname{Si}\frac{x}{2} - \operatorname{Si}\left(-\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{2KU_m}{\pi}\operatorname{Si}\frac{x}{2}.$$

Пиковая мощность

$$[s'_{\text{макс}}(t)]^2 = \frac{4K^2U_m^2}{\pi^2}\left[\operatorname{Si}\frac{x}{2}\right]^2.$$

Средняя мощность шума на выходе фильтра

$$P_{\text{ш.вых}} = K^2 G_{\text{ш}} \frac{\Delta\omega}{2\pi} = K^2 G_{\text{ш}} \frac{1}{\pi\tau_{\text{и}}} x.$$

Для отношения пиковой мощности сигнала к средней мощности шума на выходе фильтра получим

$$r^2 = \frac{4U_m^2}{G_{\text{ш}} \pi \frac{x}{\tau_{\text{и}}}} \left(\text{Si} \frac{x}{2}\right)^2 = 2h_0^2 \frac{4}{\pi x} \left(\text{Si} \frac{x}{2}\right)^2.$$

Здесь $h_0^2 = \frac{U_m^2 \tau_{\text{и}}}{2G_{\text{ш}}}$.

Поскольку $\text{Si} \frac{x}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$, причем равенство достигается лишь при $\frac{x}{2} \to \infty$, то для конечных значений $x = \pi\Delta f\tau_{\text{и}}$ $r^2 < 2h^2{}_0 \frac{1}{\Delta f\tau_{\text{и}}}$. Если $\Delta f\tau_{\text{и}} > 1$, то $r^2 < 2h^2{}_0$. Величина же $2h^2{}_0$ определяет отношение пиковой мощности сигнала к средней мощности шума на выходе согласованного фильтра (см. Р.6.4.5).

Р.6.4.9. Воспользуемся выражением для отношения пиковой мощности сигнала к средней мощности шума на выходе идеального полосового фильтра при подаче на вход радиоимпульса, полученным в Р.6.4.8:

$$r^2 = 2h_0^2 \frac{4}{\pi x} \left(Si \frac{x}{2}\right)^2.$$

Найдем максимум этой величины по x из уравнения $\frac{\partial r}{\partial x} = 0$ или $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\text{Si} \frac{x}{2}}{\sqrt{x}} \right)$.

Дифференцируя, получаем

$$4 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sqrt{x}} - \text{Si} \frac{x}{2} \frac{1}{2x\sqrt{x}} = 0.$$

Решая это уравнение, находим $x_{\text{опт}} = 4{,}3$. Отсюда для полосы идеального полосового фильтра, максимизирующей отношение пиковой мощности сигнала к средней мощности шума, получаем

$$(\Delta f)_{\text{опт}} = \frac{1{,}37}{\tau_{\text{и}}}[1].$$

---

[1] Этот результат получен впервые В. И. Сифоровым.

При этом

$$r^2_{\text{макс}} = 2h_0^2 \frac{4}{\pi 4,3} [\text{Si}\,(2,15)]^2 = 0,82 \cdot 2h_0^2,$$

причем $2h^2{}_0$ — отношение пиковой мощности сигнала к средней мощности шума на выходе согласованного фильтра (см. Р.6.4.5).

Энергетический выигрыш при переходе от квазиоптимального фильтра к оптимальному (согласованному) составляет

$$\eta = 10\lg\frac{1}{0,82} = 0,86 \text{ дБ},$$

т. е. он очень незначителен. Необходимо, однако, помнить, что полученный результат справедлив лишь при приеме одиночных импульсов. При приеме же последовательности импульсов переходной процесс на выходе полосового фильтра (который теоретически длится бесконечно долго) обусловит их взаимное перекрытие (межсимвольную интерференцию), вследствие чего уменьшится величина r^2.

Параметр же r^2 в точке отсчета на выходе согласованного фильтра не изменится при приеме последовательности импульсов длительности $\tau_{\text{и}}$, поскольку переходный процесс на выходе такого фильтра ограничен интервалом $2\tau_{\text{и}}$.

6.5. Сравнительная эффективность систем передачи непрерывных сообщений

Сравнение эффективности различных систем связи, предназначенных для передачи непрерывных сообщений, может быть осуществлено разными способами.

При фиксированном отношении *сигнал/шум* на выходе приемника (верности) можно определить энергетический выигрыш (проигрыш) перехода от i-й системы к j-й:

$$\eta_{Pi/j} = 10\lg\frac{h^2_{\text{вх}i}\, I'_j}{h^2_{\text{вх}j}\, I'_i} \quad \text{при } h^2_{\text{вых}} = \text{const}. \tag{6.33}$$

Здесь I'_i — скорость ввода информации в единицу времени в канал i-й системы; $h^2{}_{\text{вх}i} = \left(\frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}}\right)_{\text{вх}}$ — отношение *сигнал/шум* на входе приемника (в канале) для i-й системы.

При фиксированной скорости ввода информации I' (фиксированном сообщении) величина $\eta_{Pi/j}$ может быть выражена через выигрыш системы модуляции g_i

$$\eta_{Pi/j} = 10\lg \frac{g_j}{g_i}. \qquad (6.34)$$

Если в качестве i-й системы выбрана система, непосредственно передающая первичный сигнал (без модуляции), то для нее $g_i=1$. В этом случае

$$\eta_{Pi/j} = 10\lg g_j. \qquad (6.35)$$

Различные системы можно сравнивать по удельной скорости передачи информации (на 1 Гц полосы частот)

$$\nu_i = I'_i/F_i \quad \text{при } h^2_{\text{вых}} = \text{const}.$$

Выигрыш по этому показателю при переходе от i-й системы к j-й

$$\eta_{\nu i/j} = 10\lg \frac{\nu_j}{\nu_i} = 10\lg \frac{I'_j F_i}{I'_i F_j}. \qquad (6.36)$$

При фиксированной скорости ввода информации (фиксированном сообщении)

$$\eta_{\nu i/j} = \eta_{Fi/j} = 10\lg \frac{F_i}{F_j}. \qquad (6.37)$$

В этих условиях можно также ввести показатель обобщенного выигрыша

$$\eta'_{i/j} = \eta'_{Pi/j} + \eta_{Fi/j} = 10\lg \left(\frac{h^2_{\text{вх}i} F_i}{h^2_{\text{вх}j} F_j}\right) = 10\lg \frac{g'_j}{g'_i} \quad \text{при } h^2_{\text{вых}} = \text{const}. \qquad (6.38)$$

Если в i-й системе передается сигнал без модуляции, то

$$\eta'_{i/j} = 10\lg g'_j. \qquad (6.39)$$

В условиях, когда $h^2_{\text{вых}}$ (а следовательно, и верность связи) меняется случайно во времени, важной характеристикой качества системы связи является ее надежность N, определяемая вероятностью (процентом времени для эргодичного процесса) того, что $h^2_{\text{вых}}$ превышает минимально допустимую (пороговую) $h^2_{\text{вых.пор}}$ величину, определяемую видом сообщения и особенностями его получателя:

$$N = \int\limits_{h_{\text{вых.пор}}}^{\infty} w(h_{\text{вых}})\, dh_{\text{вых}}, \qquad (6.40)$$

где $w_1(h_{\text{вых}})$ — одномерное распределение величины $h_{\text{вых}}$. Эффективное средство повышения надежности связи — прием сигналов по независимым каналам.

Универсальной характеристикой эффективности систем передачи непрерывных сообщений является коэффициент использования системой пропускной способности непрерывного канала $K_c = C_c/C$.

В том случае, если канал в узком смысле и расширенный канал гауссовы, то

$$K_с = \frac{F_с}{F_к} \frac{\log\left(1 + h^2_{вых}\right)}{\log\left(1 + h^2_{вх}\right)}. \tag{6.41}$$

Задачи

6.5.1. Найти энергетический и обобщенный выигрыш перехода от системы АМ, предназначенной для передачи речевого сообщения с $\Pi = 3$, $m = 0{,}3$ и $F_с = 3{,}1$ кГц, к системе ФМ при $\beta_{ФМ} = 10$.

6.5.2. Показать, что энергетический выигрыш и обобщенный выигрыш при переходе от системы ФМ к системе ЧМ с той же полосой равен 4,7 дБ.

6.5.3. Найти значения энергетического выигрыша, выигрыша по удельной (на 1 Гц полосы частот) скорости передачи информации и обобщенного выигрыша при переходе от системы передачи сообщения без модуляции к системам АМ, БАМ, ОБП, ФМ, ФИМ — ОБП, ДМ—ФМ, АИМ—ОБП, полагая, что во всех системах передается речевое сообщение с пикфактором $\Pi = 3$ и коэффициентом корреляции $R_b = e^{-\rho|\tau|}$, $\rho = 10^3$ Гц. Считать, что при амплитудной модуляции несущей $m = 0{,}4$; индекс модуляции при ФМ $\beta_{ФМ} = 7$; длительность импульса при ФИМ $\tau_и = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ с; интервал квантования во времени при ДМ $T_к = 10^{-2}/\rho$.

6.5.4. Определить энергетический выигрыш и выигрыш по эффективности использования полосы частот перехода от системы БАМ к системе ДМ—ФМ, используемых для передачи речевого сообщения с коэффициентом корреляции $R(\tau) = e^{-\rho|\tau|}$ при отношении *сигнал/шум* на выходе приемника, равном 10^3 и 10^2. Интервал квантования во времени в системе ДМ считать равным $T_к = 10^{-2}/\rho$ ($\rho = 1000$ Гц), а полосу частот сообщения $F_с = 3100$ Гц.

6.5.5. Определить надежность связи в процентах при передаче речевых сообщений, если $w_1(h_{вх})$ имеет рэлеевское распределение, а $h^2_{пор}/\sqrt{\overline{h^2}_{вых}} = 0{,}01;\ 1;\ 10$.

6.5.6. Во сколько раз увеличится надежность N_2 связи, если прием речевых сообщений вести по двум независимым каналам с одинаковой статистикой при условии, что надежность одноканального приема $N_1 = 0{,}1;\ 0{,}5;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 0{,}99$ соответственно.

Во сколько раз изменится величина надежности трехканальной системы разнесения N_3 по сравнению с двухканальной N_2, если $N_1=0,5$.

6.5.7. Найти предельный коэффициент использования пропускной способности канала в системах АМ, БАМ, ОБП, ФМ, ФИМ—ОБП, ДМ—ФМ при $h^2_{\text{вых}}=1000;\ 5000$, если во всех системах передается речевое сообщение, а параметры систем те же, что в задаче 6.5.3.

Решения и ответы

Р.6.5.1. В соответствии с Р.6.2.7 имеем:

$$g_{\text{АМ}} = \frac{2m^2}{m^2+\pi^2} = \frac{2\cdot 0,09}{0,09+9} = 0,02;\ g'_{\text{АМ}}=0,01.$$

Согласно Р.6.2.10:

$$g_{\text{ФМ}} = \frac{F_{\text{к}}}{F_{\text{с}}}\,\frac{\beta^2_{\text{ФМ}}}{\Pi^2} = 20\,\frac{100}{9} = 222;\ g'_{\text{ФМ}} = \frac{\beta^2_{\text{ФМ}}}{\Pi^2} = \frac{100}{9} = 11,1.$$

По ф-лам (6.34) и (6.38) получаем:

$$\eta_{P\text{АМ/ФМ}} = 10\lg\frac{222}{0,02} \approx 40\ \text{дБ};\ \eta'_{P\text{АМ/ФМ}} = 10\lg\frac{11,1}{0,01} \approx 30\ \text{дБ}.$$

Р.6.5.2. По ф-лам (6.34) и (6.38) имеем:

$$\eta_{P\text{ФМ/ЧМ}} = 10\lg\frac{g_{\text{ЧМ}}}{g_{\text{ФМ}}};\ \eta'_{P\text{ФМ/ЧМ}} = 10\lg\frac{g'_{\text{ЧМ}}}{g'_{\text{ФМ}}}.$$

Воспользовавшись результатами задач 6.2.11 и 6.2.10, найдем:

$$\eta_{P\text{ФМ/ЧМ}} = 10\lg\frac{3F^3_{\text{кЧМ}}}{F^3_{\text{кФМ}}};\ \eta'_{P\text{ФМ/ЧМ}} = 10\lg\frac{3F^2_{\text{кЧМ}}}{F^2_{\text{кФМ}}}.$$

Если полосы канальных сигналов одинаковы, то

$$\eta_{P\text{ФМ/ЧМ}} = \eta'_{P\text{ФМ/ЧМ}} = 10\lg 3 = 4,7\ \text{дБ}.$$

Р.6.5.3. В данном случае энергетический выигрыш перехода к некоторой системе связи с модуляцией оценивается по ф-ле (6.35).

Воспользовавшись результатами решения задач 6.2.7—6.2.14, найдем результаты, сведенные в табл. 6.3.

Из этой таблицы видно, что из сравниваемых систем наибольший энергетический и обобщенный выигрыш

ТАБЛИЦА 6.3

Вид модуляции	η_P, дБ	η_F, дБ	η', дБ	Примечание
АМ	—7	—3	—10	$m=1 \quad \frac{F_{\text{к}}}{F_{\text{с}}}=2$
БАМ	3	—3	0	$\frac{F_{\text{к}}}{F_{\text{с}}}=2$
ОБП	0	0	0	$\frac{F_{\text{к}}}{F_{\text{с}}}=1$
ФМ	19	—11,6	7,36	$\frac{F_{\text{к}}}{F_{\text{с}}}=14$
ФИМ—ОБП	22,7	—11,5	11,2	$\frac{F_{\text{к}}}{F_{\text{с}}}=14$
ДМ—ФМ	23	—11,5	11,5	$\frac{F_{\text{к}}}{F_{\text{с}}}=14$
АИМ—ОБП	11,5	—11,5	0	$\frac{F_{\text{к}}}{F_{\text{с}}}=14$

обеспечивают системы с ДМ. Выигрыш по эффективности использования полосы частот у этих систем меньше, чем у систем АМ.

Р.6.5.4. Для системы БАМ

$$h^2_{\text{вхБАМ}} = \frac{h^2_{\text{вых}}}{2}; \quad F_{\text{кБАМ}} = 2F_{\text{с}} = 6200 \text{ Гц}.$$

Значения $h^2_{\text{вх ДМ}}$ при заданных значениях $h^2_{\text{вых}}$ и $T_{\text{к}} = 10^{-2}/\rho$ берем из Р.6.3.7. Полоса частот ДМ—ФМ $F_{\text{к ДМ}} = 2/T_{\text{к}} = 200\,000$ Гц. Интересующие значения η_P и η_F сведены в табл. 6.4.

ТАБЛИЦА 6.4

$h^2_{\text{вых}}$	10^2	10^3
η_P, дБ	6	24,8
η_F, дБ	—15,1	—15,1

Из таблицы видно, что по эффективности использования полосы частот система ДМ—ФМ проигрывает

БАМ на 15,1 дБ (в 32,4 раза), но обеспечивает существенный энергетический выигрыш.

$$N = 100 \int\limits_{h_{\text{пор}}}^{\infty} \frac{2h_{\text{вых}}}{\overline{h^2_{\text{вых}}}} \, e^{-h^2_{\text{вых}}/\overline{h^2_{\text{вых}}}} \, dh_{\text{вых}} = 100 e^{-h^2_{\text{пор}}/\overline{h^2_{\text{вых}}}}.$$

Р.6.5.5.

При $h^2_{\text{пор}}/\overline{h^2}_{\text{вых}}=0{,}01;\ 1;\ 10$ $N=99\%;\ 36\%;\ 0{,}0045\%$.

Р.6.5.6. Ненадежность в отдельном параллельном канале $1-N_1$, где N_1 — надежность канала.

При приеме сигналов по n независимым каналам ненадежность связи $1-N_n$ будет определяться вероятностью того, что одновременно во всех каналах $h_{\text{вых}} < h_{\text{пор}}$, т. е. с учетом однородности статистики в отдельных каналах $1-N_n=(1-N_1)^n$ или надежность связи при n-канальном приеме $N_n=1-(1-N_1)^n$. В табл. 6.5 сведены интересующие нас значения.

ТАБЛИЦА 6.5

N_1	0,1	0,5	0,8	0,9	0,99
N_2	0,20	0,75	0,96	0,99	0,9999
N_3	0,27	0,875	0,992	0,999	0,999999
$\frac{N_2}{N_1}$	2	1,5	1,92	1,1	1,0100
$\frac{N_3}{N_1}$	2,7	1,75	1,98	1,11	1,0101

Из таблицы видно, что эффективность параллельной передачи падает по мере улучшения качества (надежности) работы одноканальной системы. Видно также, что эффективность разнесенного приема падает по мере увеличения числа ветвей разнесения.

Р.6.5.7. Используя (6.40) и положив $h^2_{\text{вх}}=\frac{h^2_{\text{вых}}}{g}$, имеем расчетную формулу

$$K_{\text{с}} = \frac{F_{\text{с}}}{F_{\text{к}}} \, \frac{\log\left[1 + h^2_{\text{вых}}\right]}{\log\left[1 + \frac{h^2_{\text{вых}}}{g}\right]}.$$

В табл. 6.6 сведены значения $K_с$.

ТАБЛИЦА 6.6

Система	Значения $K_с$ при различных $h^2_{вых}$	
	$h^2_{вых}=1000$	$h^2_{вых}=5000$
АМ	0,34	0,34
БАМ	0,56	0,54
ОБП	1,0	1,0
ФМ	0,41	0,21
ФИМ—ОБП	0,29	0,18
ДМ—ФМ	0,63	0,6

Из табл. 6.6 видно, что из сравниваемых наибольшей эффективностью (коэффициентом использования пропускной способности канала) характеризуются системы ОБП и ДМ—ФМ.

Глава 7

МНОГОКАНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СВЯЗИ

7.1. Раздельные и комбинационные системы уплотнения при многоканальной связи

В многоканальных системах связи обеспечивается взаимонезависимая передача нескольких сообщений по одной общей линии связи путем ее уплотнения с применением общего передатчика и приемника.

На практике применяются преимущественно системы раздельного и комбинационного уплотнения.

В раздельных системах уплотнения, используемых для передачи как дискретных, так и непрерывных сообщений, групповой сигнал $s_\Sigma(t)$ образуется путем линейного сложения индивидуальных сигналов.

$$s_\Sigma(t)=\sum_{k=1}^{n} a_k s_k(t)^1. \qquad (7.1)$$

---

[1] Здесь коэффициенты a_k полагаются неизменными на интервале определения канальных сигналов T, что обеспечивается при передаче непрерывных сообщений их дискретизацией во времени с шагом $\Delta t=T$.

При отсутствии искажений и аддитивных шумов в канале однозначное выделение индивидуальных сигналов из суммарного группового сигнала (7.1) возможно лишить при линейной независимости функций ансамбля $\{s_k(t)\}$. Необходимым и достаточным условием этого является отличие от нуля определителя Грама

$$D = \begin{vmatrix} \rho_{11}\rho_{12} & \cdot & \cdot & \cdot\rho_{1n} \\ \rho_{21}\rho_{22} & \cdot & \cdot & \cdot\rho_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{n1}\rho_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot\rho_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{7.2}$$

где $\rho_{kl} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T s_k(t)\, s_l(t)\, dt.$

Следует заметить, что при выполнении условия (7.2) групповой сигнал (7.1) может обратиться в нуль только при нулевых значениях всех a_k.

Процедура выделения индивидуальных сигналов из группового в месте приема сводится к определению проекций вектора $\vec{s}_\Sigma$ на соответствующие координатные оси. Эту операцию можно осуществить корреляционной обработкой

$$L(s_\Sigma) = (\vec{s}_\Sigma \vec{c}) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T s_\Sigma(t)\, c_k(t)\, dt = a_k. \tag{7.3}$$

Здесь $\{c_k(t)\}$ — система базисных функций (опорных сигналов), удовлетворяющая условию

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T s_k(t)\, c_l(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{при } l \neq k, \\ \neq 0 & \text{при } l = k. \end{cases} \tag{7.4}$$

Для ортогонального ансамбля сигналов $\{s_k(t)\}$ базисные функции $c_l(t) = A_l s_l(t)$, т. е. определяются тем же ансамблем. С учетом возможного взаимного запаздывания сигналов в канале условие разделения (7.4) можно записать для этих сигналов в виде

$$B_{k,l}(\tau) = \int\limits_0^T s_k(t)\, s_l(t+\tau)\, dt = 0,\ 0 \leqslant \tau \leqslant T,\ k \neq l,\ k,\ l = 1,2,\ldots, n. \tag{7.5}$$

Выполнение условия (7.5) позволяет строить несинхронную систему уплотнения (систему со свободным доступом каждого абонента в канал). Если же система является синхронной (индивидуальные сигналы имеют одинаковую длительность и начало отсчета), условие разделения (7.5) должно выполняться при $\tau = 0$.

Существуют различные способы раздельного уплотнения линий связи.

1. Классическое частотное уплотнение. При таком способе уплотнения сигналы индивидуальных каналов можно записать в виде

$$s_k(t) = A_k(t) \cos[\omega_k t + \theta_k(t)], \tag{7.6}$$

причем информация закладывается в изменения огибающей $A_k(t)$, фазы $\theta_k(t)$ или одновременно в изменения обоих этих параметров. Здесь ω_k — средняя частота в спектре индивидуального сигнала. Эти частоты выбираются так, чтобы индивидуальные сигналы практически не перекрывались по спектру.

2. Временнóе уплотнение. При таком способе уплотнения элементы индивидуальных сигналов передаются и принимаются последовательно во времени в общей полосе частот, что осуществляется посредством импульсного модулятора и синхронно работающих на передаче и приеме устройств коммутации. Интервал следования элементов индивидуального сигнала $T_к$ чаще всего выбирается равным $1/2\,F_c$, а частота импульсного генератора, осуществляющего дискретизацию во времени сигналов индивидуальных источников, $F_г=2F_cn$, n — число каналов уплотнения. В системах временнóго уплотнения индивидуальные канальные сигналы, как правило, представляют собой отрезки синусоиды, последовательно передаваемые по каналу. Такие системы иногда называют последовательными [13].

3. Уплотнение по фазе. При этом способе уплотнения в качестве индивидуальных сигналов на интервале T выбирают сигналы с неизменной мгновенной частотой

$$s_k(t) = A_k(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_k)\,. \tag{7.7}$$

Передаваемая информация закладывается в коэффициенты $A_k(t)$ а по различию фаз φ_k осуществляется разделение. Систему уплотнения по фазе чаще всего делают двухканальной, так как только при $n=2$ сигналы (7.7) остаются линейнонезависимыми при любой разности фаз $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1\neq k\pi$.

4. Уплотнение по форме. При уплотнении по форме в качестве индивидуальных сигналов используются сигналы различной формы, удовлетворяющие условиям разделения и использующие общие полосы частот и интервалы времени. Как правило, это ансамбль ортогональных сигналов на интервале анализа T. Часто при передаче дискретных сообщений используются индивидуальные сигналы в виде отрезков гармонических колебаний кратных частот, удовлетворяющие условиям ортогональности в усиленном смысле:

$$s_k(t) = A_k\cos(\omega_k t + \varphi_k); \quad \omega_k = k\,\frac{2\pi}{T}\,. \tag{7.8}$$

Разделение осуществляется по различию частот ω_k, а информация закладывается в изменения амплитуд A_k или фаз φ_k. Групповой сигнал $s_\Sigma(t)$ при этом является многочастотным, а систему, работающую с такими сигналами, называют параллельной [13]. В качестве индивидуальных сигналов при уплотнении по форме часто используют последовательные составные сигналы. В этом случае индивидуальный сигнал длительности T формируется из последовательности $N=T/\tau_и$ отрезков синусоидальных колебаний длительности $\tau_и$ (элементарные сигналы), которые могут отличаться частотами, фазами и амплитудами. Когда элементарные сигналы различаются по частоте, то говорят, что последовательный составной сигнал кодируется в виде частотно-временнóй матрицы (ЧВМ). В качестве индивидуальных сигналов, уплотняемых по форме, можно использовать и реализации шумового процесса.

В комбинационных системах уплотнения, используемых для передачи дискретных сообщений, одно значение модулируемого параметра канального сигнала ставится в соответствие группе символов, выдаваемых индивидуальными источниками. Широко распространены системы комбинационного уплотнения двух двоичных источников: система ДЧМ — двукратная частотная манипуляция, система ДФМ (ДОФМ) — двукратная фазовая (относительная фазовая) манипуляция. Эти системы являются четырехпозиционными.

Задачи

7.1.1. Показать, что ансамбль $2n$ биортогональных сигналов $\{s_k(t), -s_k(t)\}$ не удовлетворяет условию линейной независимости.

7.1.2. Показать, что система ортогональных на интервале $(0, T)$ функций $\{s_k(t)\}$ удовлетворяет условию линейной независимости только тогда, когда в ее составе отсутствуют реализации с нулевой энергией.

7.1.3. В двухканальной системе связи предполагается использовать индивидуальные сигналы $s_1(t) = a_1\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$ и $s_2(t)=a_2\cos(\omega_0 t+\varphi_0+\Delta\varphi)$, имеющие длительность $T\gg 2\pi/\omega_0$.

Найти величину $\Delta\varphi$, при которой можно при отсутствии аддитивных шумов в канале осуществить однозначное выделение выбранных индивидуальных сигналов из группового сигнала $s'_\Sigma(t)=\gamma s_\Sigma(t)=\gamma[a_1 s_1(t)+a_2 s_2(t)]$ и найти опорные сигналы (базисные функции) на приеме $c_1(t)$ и $c_2(t)$, позволяющие осуществить такое разделение.

7.1.4. Выяснить, возможно ли однозначное разделение каналов в трехканальной системе связи при отсутствии в канале искажений и аддитивных шумов, если в качестве индивидуальных переносчиков использованы сигналы

$$s_1(t) = a_1\cos(\omega_0 t+\varphi_0);\quad s_2(t) = a_2\cos(\omega_0 t+\varphi_0+\Delta\varphi_1);$$
$$s_3(t) = a_3\cos(\omega_0 t+\varphi_0+\Delta\varphi_2),$$

имеющие одинаковую длительность $T\gg 2\pi/\omega_0$.

7.1.5. Показать, что при нормальном аддитивном стационарном флуктуационном шуме в канале $U(t)$ и ортогональном ансамбле индивидуальных сигналов $\{s_k(t)\}$, известных точно в месте приема и используемых для передачи равновероятных дискретных сообщений, алгоритм разделения (7.3) можно назвать оптимальным по критерию минимума средней вероятности ошибки. Найти отношение *сигнал/шум* в отдельном канале, полагая, что все реализации канальных сигналов имеют одинаковые энергии.

7.1.6. Усредненный энергетический спектр индивидуального сигнала при классическом частотном уплотнении определяется выражением

$$G_k(f) = A \exp[-\beta^2 (\omega - \omega_k)^2].$$

(гармоническая несущая, модулированная по частоте или фазе нормальным стационарным процессом).

Найти необходимый минимальный разнос между средними частотами двух соседних каналов $\Delta f = 2F_1$, полагая, что в полосе $f_k \pm F_1$ сосредоточено 95% мощности индивидуального сигнала. Найти отношение *сигнал/переходная помеха* на выходе разделительного полосового фильтра, считая, что его частотная характеристика (коэффициент передачи мощности) имеет фор-

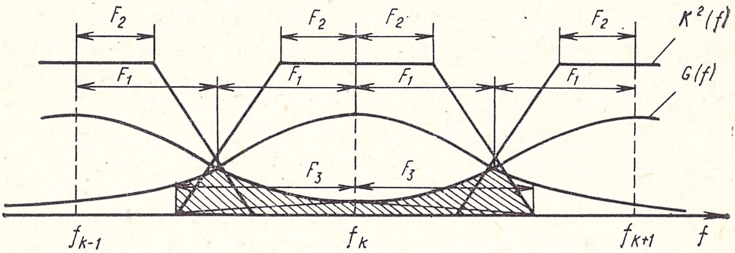


Рис. 7.1. К определению переходной помехи и разноса между канальными частотами многоканальной системы при трапецеидальных характеристиках разделительных фильтров

му трапеции (рис. 7.1), причем в полосе $f_к \pm F_2$ сосредоточено 90% мощности индивидуального сигнала. Коэффициент передачи фильтра по мощности в пределах полосы $f_к \pm F_2$ считать равным 1, а на частотах $f_к \pm F_1$ — 0,1. Принять $\beta = 1{,}23 \cdot 10^{-4}$ с, $A = 5 \cdot 10^{-4}$ Вт/Гц.

7.1.7. Показать, что система с классическим частотным уплотнением использует сигналы, удовлетворяющие условию (7.5), и, следовательно, может работать в асинхронном режиме.

7.1.8. Определить необходимую полосу частот Δf_c для передачи десяти независимых речевых сообщений (полоса каждого 0,3—3,4 кГц) посредством однополосной модуляции на поднесущих и амплитудной модуляции общей несущей (система ОМ—АМ) по линии связи с классическим частотным уплотнением. Считать, что для уменьшения переходных помех между каналами разнос между средними частотами каналов $\Delta f_к$ увеличивается (по сравнению с минимально необходимой величиной) на защитный интервал $\Delta f_{защ}$, составляющий 30% от $\Delta f_к$.

7.1.9. В системе с временны́м уплотнением передаются независимые речевые сообщения (полоса каждого 0,3—3,4 кГц) с первичной фазо-импульсной модуляцией

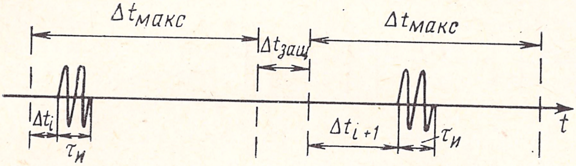


Рис. 7.2. Реализация сигнала многоканальной системы связи с фазо-импульсной модуляцией

и вторичной амплитудной модуляцией на общей несущей (система ФИМ—АМ). Полагая, что канальный сигнал занимает полосу 21,5 МГц, определить число каналов уплотнения n. Считать, что для уменьшения переходных помех оставляются защитные интервалы $\Delta t_{защ}$ между тактовыми интервалами отдельных каналов, составляющие 2% от интервала дискретизации первичного сигнала во времени (рис. 7.2), а максимальное время отклонения фронта импульса в тактовом интервале $\Delta t_{макс} = 128\tau_и$ ($\tau_и$ — длительность элементарной посылки). Во сколько раз увеличится число каналов уплотнения при том же отношении $\Delta t_{макс}/\tau_и$, если вследствие принятых мер по компенсации переходного процесса в канале [13] можно будет отказаться от защитных промежутков между тактовыми интервалами?

7.1.10. Для передачи речевых сигналов от независимых источников использована система временно́го уплотнения с интервально-импульсной модуляцией (ИИМ), которая отличается от системы ФИМ тем, что за отдельным каналом не закреплен больше интервал $\Delta t_{макс}$ (рис. 7.3). Информация об отсчете передаваемого сообщения b_k содержится в длительности интервала Δt_k между импульсом, соответствующим данному сообщению, и предыдущим импульсом, который соответствует предыдущему по порядку сообщению (каналу). Отклонение Δt_k (которое всегда должно быть положительным) определяется соотношением

$$\Delta t_k = \Delta t_0 + a\,[b_k + |\,b_k\,|\,(1+\Delta)],$$

где Δt_0 — минимальный интервал, соответствующий молчащему каналу[1]; a — коэффициент пропорциональности; Δ — произвольная положительная величина.

Полагая, что отсчеты сообщения b_k распределены нормально с нулевым средним значением и дисперсией σ^2, определить, во сколько раз можно увеличить число каналов при использовании ИИМ по сравнению с ФИМ. Считать, что в обеих системах защитные промежутки отсутствуют.

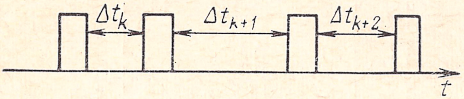


Рис. 7.3. Реализация сигнала многоканальной системы связи с интервально-импульсной модуляцией

7.1.11. Групповой сигнал двухканальной системы фазового уплотнения имеет вид $s_\Sigma(t) = \overset{\circ}{X}_1(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \overset{\circ}{X}_2(t)\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$, где $\overset{\circ}{X}_1(t)$ и $\overset{\circ}{X}_2(t)$ — независимые стационарные модулирующие процессы с одинаковыми дисперсиями. Прием осуществляется двухканальной схемой (рис. 7.4), где опорные сигналы $c_1(t) = 2\cos(\omega_0 t + \psi)$, $c_2(t) = 2\sin(\omega_0 t + \psi)$, а фильтры нижних частот предполагаются идентичными и неискажающими для модулирующих процессов $\overset{\circ}{X}_1(t)$ и $\overset{\circ}{X}_2(t)$.

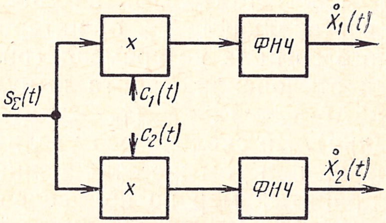


Рис. 7.4. Структурная схема приемного устройства двухканальной системы связи с фазовым уплотнением

Найти отношение средней мощности переходной помехи (обусловленной фазовой расстройкой $\Delta = \psi - \varphi_0$) к средней мощности сигнала в отдельном канале и определить расстройку, при которой это отношение не превышает 0,1.

---

[1] Молчащий канал, как и задействованный, фиксируется в месте приема импульсом длительности $\tau_и \leqslant \Delta t_0$.

7.1.12. Система МС-5 [1], использующая сигналы вида (7.8) с фазовой манипуляцией, может быть использована для уплотнения канала с полосой 3,1 кГц сообщениями от 20 дискретных источников, работающих синхронно со скоростью 120 Бод ($T_c=8{,}333$ мс). Разнос между канальными частотами $\Delta f=142$ Гц. Нарисовать амплитудные спектры индивидуальных сигналов, убедиться в том, что они существенно перекрываются, и определить интервал анализа по алгоритму (7.3), на котором обеспечивается ортогональность канальных сигналов.

7.1.13. Индивидуальные сигналы длительности T асинхронно-адресной системы связи образованы одночастотными последовательными сигналами $s_k(t)=$ $=X_k(t)\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$, где $X_k(t)$ — двоичная двухполярная синхронная последовательность, содержащая $N=$ $=T/\tau>1$ посылок длительностью τ.

Показать, что условия разделения этих сигналов (7.5) при $T\gg 2\pi/\omega_0$ и $f_0\gg 1/\tau_0$ сводятся к требованию

$$B_{k,l}(\tau)=\int\limits_0^T X_k(t)\,X_l(t+\tau)\,dt=0,\ 0\leqslant\tau\leqslant T.$$

т. е. взаимоортогональности двоичных последовательностей, образующих «адреса» отдельных каналов, при произвольном взаимном сдвиге.

7.1.14. Индивидуальные сигналы $s_k(t)$ длительности $T=N\tau$ ($N=17$) асинхронно-адресной системы связи образованы на основе частотно-временно́й матрицы, показанной на рис. 7.5.

Нарисуйте форму сигнала, полагая, что радиоимпульсы имеют неизменную амплитуду h, и объясните, почему для его выделения из группового сигнала может быть использована схема, показанная на рис. 7.6 и содержащая: четыре полосовых фильтра, настроенных на соответствующие рабочие частоты: f_1, f_2, f_3, f_4; четыре амплитудных детектора, четыре линии задержки с 17 отводами [в каждой линии задействован лишь один отвод, соответствующий «адресу» данного канала (абонента)]; нелинейную схему совпадений *СС*, на выходе которой появляется импульс сигнала, несущий сообщение, только при том условии, что задержанные входные импульсы во всех ветвях совпадают во времени.

Определите возможные число одновременно работающих каналов (число кодовых адресных комбинаций), которое можно образовать на основе ЧВМ, реализация которой показана на рис. 7.5[1].

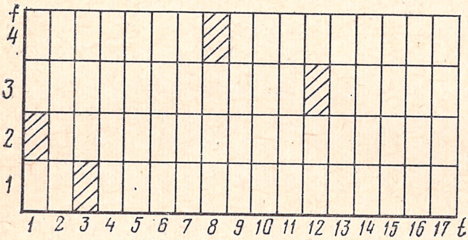

f
4
3
2
1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 t

Рис. 7.5. Частотно-временна́я матрица

7.1.15. В отдельных каналах асинхронно-адресной системы с сигналами предыдущей задачи передаются речевые сообщения (полоса 0,3—3,4 кГц). Первичная модуляция осуществляется по системе ФИМ, причем

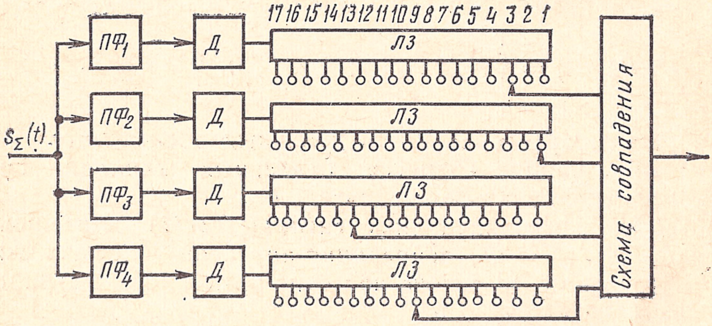

17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
$s_\Sigma(t)$
ПФ$_1$
ПФ$_2$
ПФ$_3$
ПФ$_4$
Д
Д
Д
Д
ЛЗ
ЛЗ
ЛЗ
ЛЗ
Схема совпадения

Рис. 7.6. Структурная схема приемного устройства асинхронно-адресной системы связи

девиация фронта импульса $\Delta t_{\text{макс}} = 128\tau_{\text{и}}$. Определить максимально возможную длительность посылки $\tau_{\text{и}}$ и полосу канального сигнала, имея в виду, что вторичная модуляция — АМ.

7.1.16. В синхронной четырехпозиционной системе комбинационного уплотнения групповые символы передаются посредством частотной манипуляции синусоидальной несущей (система ДЧМ). Четырьмя мгновенными частотами f_1, f_2, f_3 и f_4 передаются значения двоичных символов двух источников согласно табл. 7.1.

---

[1] Незаштрихованные элементы ЧВМ соответствуют элементарным сигналам, не используемым в данной адресной комбинации (эти сигналы имеют нулевую амплитуду).

ТАБЛИЦА 7.1

Символ 1-го источника	1	1	0	0
Символ 2-го источника	1	0	1	0
Рабочая частота	f_1	f_2	f_3	f_4

Полагая, что параметры сигналов в месте приема известны с точностью до фазы, а в непрерывном канале действует нормальный белый шум, определить вероятность ошибки в каждом двоичном канале при оптимальном приеме (символы «0» и «1» передаются от источников с равными вероятностями).

7.1.17. В синхронной четырехпозиционной системе комбинационного уплотнения групповые символы передаются посредством фазовой манипуляции синусоидальной несущей (ДФМ). Кодовая таблица имеет вид

ТАБЛИЦА 7.2

Символ 1-го канала	1	1	0	0
Символ 2-го канала	1	0	1	0
Фаза сигнала ДФМ	$\varphi_1 = 0$	$\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$	$\varphi_3 = \pi$	$\varphi_4 = \frac{3}{4}\pi$

Полагая, что параметры сигнала известны точно в месте приема, а в канале действует нормальный белый шум, определить вероятность ошибки в каждом двоичном канале при оптимальном приеме и равной вероятности передачи символов «0» и «1».

Как изменится вероятность ошибки, если от абсолютной перейти к относительной фазовой манипуляции (система ДОФМ)?

Решения и ответы

Р.7.1.1. Представим групповой сигнал согласно (7.1)

$$s_{\Sigma}(t)=\sum_{k=1}^{n}a_k s_k(t)-\sum_{k=n+1}^{2n}a_k s_k(t)=\sum_{k=1}^{n}s_k(t)\left(a_k-a_{k+n}\right).$$

Легко заметить, что при $a_k=a_{k+n}\neq0$ $s_{\Sigma}(t)=0$.

Это означает, что при использовании сигналов биортогональной системы с активной паузой в качестве индивидуальных переносчиков информации в многоканальной системе связи нельзя осуществить однозначное разделение каналов. Этот вывод подтверждается и при проверке условия (7.2).

В самом деле, для биортогональной системы определитель Грама

$$D=\begin{vmatrix} \rho_{11}\rho_{12}\;\ldots\;\rho_{1n}-\rho_{1n+1}-\rho_{1n+2}\;\ldots-\rho_{12n} \\ \rho_{21}\;\ldots\;\rho_{2n}-\rho_{2n+1}\;\ldots\ldots\ldots-\rho_{22n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho_{n1}\;\ldots\;\rho_{nn}-\rho_{nn+1}\;\ldots\ldots\ldots-\rho_{n2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\rho_{n1}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;\rho_{n2n} \end{vmatrix}.$$

Легко показать, что путем линейного сложения элементов отдельных строк или столбцов (что не изменяет величину определителя) можно получить матрицу с нулевыми элементами по какой-либо строке или столбцу, что приводит к результату $D=0$.

Р.7.1.2. Для системы ортогональных функций $\{s_k(t)\}$ определитель Грама принимает вид

$$D=\begin{Vmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \rho_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \rho_{nn} \end{Vmatrix}=\rho_{11}\rho_{22}\cdots\rho_{nn}$$

Величина $\rho_{kk}=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T s_k(f)\,s_k(f)\,dt=E_k$ — энергия сигнала $s_k(t)$.

Если энергия хотя бы одной реализации $s_k(t)$ будет равна нулю, то определитель Грама $D=\rho_{11}\rho_{22}\dots\rho_{nn}=0$ и условие линейной независимости не выполняется.

Р.7.1.3. Составим определитель Грама. В данном случае

$$D=\begin{vmatrix} \frac{a_1^2}{2} & \frac{a_1a_2}{2}\cos\Delta\varphi \\ \frac{a_1a_2}{2}\cos\Delta\varphi & \frac{a_2^2}{2} \end{vmatrix}=\frac{a_1^2a_2^2}{4}(1-\cos^2\Delta\varphi).$$

Замечаем, что $D=0$ только при условии $\cos^2\Delta\varphi=1$ или при $\Delta\varphi=k\pi$ ($k=0, 1, 2, \dots$).

Следовательно, однозначное разделение сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ возможно при любых значениях $\Delta\varphi$, кроме $\Delta\varphi=k\pi$.

Найдем теперь опорные сигналы $\{c_k(t)\}$. Согласно (7.4) должны выполняться следующие условия:

$$\frac{1}{T}\int_0^T s_1(t)\,c_1(t)\,dt\neq 0;\quad \frac{1}{T}\int_0^T s_2(t)\,c_1(t)\,dt=0;$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T s_1(t)\,c_2(t)dt=0;\quad \frac{1}{T}\int_0^T s_2(t)\,c_2(t)\,dt\neq 0.$$

Этим условиям удовлетворяют опорные сигналы

$$c_1(t)=\frac{A_1}{\sin\Delta\varphi}\cos\left(\omega_0t+\varphi_0+\Delta\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\ \text{и}$$

$$c_2(t)=\frac{A_2}{\sin\Delta\varphi}\cos\left(\omega_0t+\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right),$$

где A_1, A_2 — постоянные коэффициенты.

При $\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$

$$c_1(t)=A_1\cos(\omega_0t+\varphi_0);\quad c_2(t)=A_2\cos\left(\omega_0t+\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right).$$

В этом случае опорные сигналы совпадают по фазе с сигналами индивидуальных каналов.

Р.7.1.4. Для данного случая определитель Грама

$$D=\begin{vmatrix} \frac{a_1^2}{2} & \frac{a_1a_2}{2}\cos\Delta\varphi_1 & \frac{a_1a_3}{2}\cos\Delta\varphi_2 \\ \frac{a_1a_2}{2}\cos\Delta\varphi_1 & \frac{a_2^2}{2} & \frac{a_2a_3}{2}\cos(\Delta\varphi_2-\Delta\varphi_1) \\ \frac{a_1a_3}{2}\cos\Delta\varphi_2 & \frac{a_2a_3}{2}\cos(\Delta\varphi_2-\Delta\varphi_1) & \frac{a_3^2}{2} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{8}a_1^2a_2^2a_3^2\,[1+2\cos\Delta\varphi_1\cos\Delta\varphi_2\cos(\Delta\varphi_2-\Delta\varphi_1)-$$

$$-\cos^2\Delta\varphi_1-\cos^2\Delta\varphi_2-\cos^2(\Delta\varphi_2-\Delta\varphi_1)].$$

Величина $\frac{1}{8}a^2{}_1a^2{}_2a^2{}_3\neq 0$ при ненулевых a_k.

Найдем, чему равна величина совокупности слагаемых в скобках:

$$1+2\cos\Delta\varphi_1\cos\Delta\varphi_2\cos(\Delta\varphi_2-\Delta\varphi_1)-\cos^2\Delta\varphi_1-\cos^2\Delta\varphi_2-$$

$$-\cos^2(\Delta\varphi_2-\Delta\varphi_1)=\sin^2\Delta\varphi_2\cos^2\Delta\varphi_1-$$

$$-\cos^2\Delta\varphi_1\sin^2\Delta\varphi_2=0.$$

Поскольку при любых $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ определитель Грама для выбранной системы сигналов равен нулю, эти сигналы являются линейнозависимыми, и, следовательно, их однозначное разделение невозможно.

Р.7.1.5. При ортогональном ансамбле согласно (7.4) опорные сигналы $c_k(t)=A_ks_k(t)$, где A_k — коэффициент пропорциональности. Подставляя в (7.3) вместо $s_2(t)$ принимаемое колебание $z(t)=s_2(t)+u(t)$ и выражение для $c_k(t)$, получаем алгоритм обработки в k-м канале

$$L\,[z(t)]_k=\frac{1}{T}\int\limits_0^T A_kz(t)\,s_k(t)\,dt.$$

Если все реализации отдельных канальных сигналов $a_{k,\,i}s_k(t)$ (i — номер реализации) известны в месте приема (а это возможно при дискретном ансамбле $\{a_{k,\,i}\}$, то можно выбрать $A_{k,\,i}=a_{k,\,i}T$ и в каждом канале реализовать алгоритм

$$L\,[z(t)]_k=\max\left[\int\limits_0^T z(t)\,a_{k,i}\,s_k(t)dt-\frac{1}{2}\int\limits_0^T a_{k,i}^2\,s_k^2(t)\,dt\right],$$

что обеспечивает минимум вероятности ошибки при нормальном стационарном белом шуме в канале (см. гл. 5).

Если все реализации канального сигнала имеют одинаковую энергию $\int\limits_0^T a^2_{k,i} s^2_k(t)\, dt = E_k$, то отношение *сигнал/шум* в k-м канале [учитывая, что $z(t)=a_{k,i}s_k(t)+ u(t) + \sum\limits_{j\neq k} a_j s_j(t)$]

$$\left(\frac{P_c}{P_ш}\right)_k = \frac{\left(\int\limits_0^T a^2_{k,i}\, s^2_k(t)\, dt\right)^2}{\left(\int\limits_0^T u(t)\, a_{k,i}\, s_k(t)\, dt\right)^2} = \frac{E^2_k}{E_k \dfrac{G_ш}{2}} = \frac{2F_k}{G_ш},$$

где $G_ш$ — энергетический спектр шума в канале.

Р.7.1.6. Величину F_1 найдем из условия, что в полосе $f_k \pm F_1$ содержится 95% мощности индивидуального сигнала:

$$\int\limits_{f_k-F_1}^{f_k+F_1} A\,\mathrm{e}^{-\beta^2(\omega-\omega_k)^2}\, df = 0{,}95A \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta^2(\omega-\omega_k)^2}\, df.$$

После очевидных преобразований получим уравнение $\Phi(2\pi F_1 \sqrt{2}\beta)=0{,}95$, где $\Phi(x)$ — функция Крампа. По таблицам $\Phi(x)$ находим $2\pi F_1\sqrt{2}\beta=1{,}96$, откуда при $\beta=1{,}23\cdot 10^{-4}$ с получаем $F_1=1{,}8$ кГц.

Разнос между несущими частотами индивидуальных каналов $2F_1=3{,}6$ кГц. Аналогичным образом находим величину F_2, считая, что в полосе $f_k \pm F_2$ сосредоточено 90% мощности индивидуального сигнала:

$$\int\limits_{f_k-F_2}^{f_k+F_2} A\,\mathrm{e}^{-\beta^2(\omega-\omega_k)^2} df = 0{,}9 \int\limits_{-\infty}^{\infty} A\,\mathrm{e}^{-\beta^2(\omega-\omega_k)^2}\, df.$$

Отсюда получим $\Phi(2\pi F_2\sqrt{2}\beta)=0{,}9$ и $F_2=1{,}5$ кГц. Из условия равенства коэффициента передачи фильтра 0,1 на частотах $f_k \pm F_1$ находим полосу F_3, на границе которой коэффициент передачи фильтра обращается в нуль: $F_3 = \dfrac{F_1-F_2}{0{,}9} + F_2$, $F_3=1{,}83$ кГц.

Определим мощность сигнала на выходе разделительного фильтра k-го канала, полагая, что в полосе частот от f_k+F_2 до f_k+F_3 коэффициент передачи фильтра по мощности изменяется по закону

$$K^2(f) = 1 - \frac{f - (f_k + F_2)}{F_3 - F_2};$$

$$P_{\text{с}} = 2 \int\limits_{f_k}^{f_k+F_2} A\,\mathrm{e}^{-\beta^2(\omega-\omega_k)^2}\,df + 2 \int\limits_{f_k+F_2}^{f_k+F_3} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{f - f_k - F_2}{F_3 - F_2}\right) A\,\mathrm{e}^{-\beta^2(\omega-\omega_k)^2}\,dt.$$

После очевидных преобразований получаем

$$P_{\text{с}} = \frac{A}{2\beta\sqrt{\pi}} \left\{ \Phi(2\sqrt{2}\pi\beta F_3) + \frac{F_2}{F_3 - F_2}[\Phi(2\sqrt{2}\pi\beta\,F_3) - \right.$$

$$- \Phi(2\sqrt{2}\pi\beta F_2)] + \frac{1}{2\beta\sqrt{\pi^3}\,(F_3 - F_2)}[\exp(-\beta^2 4\pi^2 F_3^2) -$$

$$\left. - \exp(-\beta^2\,4\pi^2\,F_2^2)] \right\}.$$

Вычисляя, находим $P_{\text{с}} = 10{,}9 \cdot 10^{-3}$ Вт.

Мощность переходной помехи (заштрихованная область на рис. 7.1) определим с некоторым превышением, полагая, что в полосе $f_k \pm F_3$ характеристика фильтра равномерна, а переходная помеха создается только двумя соседними каналами

$$P_{\text{п.п}} = 2 \int\limits_{f_k+2F_1-F_3}^{f_k+2F_1+F_2} A\,\mathrm{e}^{-\beta^2(\omega-\omega_k)^2}\,df =$$

$$= \frac{A}{2\sqrt{2}\,\pi\beta} \left\{ \Phi[2\sqrt{2}\pi\beta(2F_1 + F_3)] - \Phi[2\sqrt{2}\pi\beta(2F_1 - F_3)] \right\}.$$

После вычислений получаем $P_{\text{п.п}} = 6{,}55 \cdot 10^{-4}$ Вт. Отношение *сигнал/переходная помеха* на выходе разделительного фильтра k-го канала $P_{\text{с}}/P_{\text{п.п}} = 16{,}6$.

Р.7.1.7. Используя равенство Парсеваля [15], условие (7.5) можно записать в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_k(f)\,\mathbf{S}_l(-f)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,df = 0,$$

где $\mathbf{S}_k(f)$ — комплексный спектр сигнала $s_k(t)$; $\mathbf{S}_l(-f)$ — комплексно-сопряженный спектр сигнала $s_l\,(t)$.

Поскольку при классическом частотном уплотнении амплитудные спектры индивидуальных сигналов не должны существенно перекрываться, то сформулированное условие действительно выполняется (на практике приближенно). Следовательно, при классическом частотном уплотнении используются канальные сигналы, сохраняющие взаимную ортогональность при произвольных взаимных сдвигах. Правда, это достигается путем существенного расширения занимаемой системой полосы частот по сравнению с минимально возможной величиной

Р.7.1.8. Минимально необходимый разнос $\Delta f_{\text{мин}} = 2\cdot 3400 = 6800$ Гц. Разнос Δf_k с учетом защитного интервала определяется из соотношения $\Delta f_k = \Delta f_{\text{мин}} + 0{,}3\Delta f_k$. Откуда $\Delta f_k = \frac{\Delta f_{\text{мин}}}{0{,}7} \approx 9700$ Гц ($\Delta f_{\text{защ}} = 0{,}3\Delta f_k = 2900$ Гц). Занимаемая многоканальной системой полоса частот $\Delta f_c = 2\cdot 10\Delta f_k = 192\,000$ Гц.

Р.7.1.9. Интервал дискретизации $T_{\text{к}} = \frac{1}{2F_{\text{макс}}} \approx 147$ мкс. Очевидно, что для n-канальной системы с ФИМ должно выполняться условие

$$n\,[\Delta t_{\text{макс}} + \Delta t_{\text{защ}}] = T_{\text{к}} \quad \text{или} \quad n\,[128\tau_{\text{и}} + 0{,}02T_{\text{к}}] = T_{\text{к}}.$$

Занимаемая системой полоса частот $\Delta f_c \approx 2/\tau_{\text{и}} = 21{,}5 \times 10^6$ Гц. Отсюда

$$n = \frac{T_{\text{к}}}{0{,}02T_{\text{к}} + 128\dfrac{2}{\Delta f_c}} = \frac{147\cdot 10^{-6}}{0{,}02\cdot 147\cdot 10^{-6} + \dfrac{256}{21{,}5}10^{-6}} \approx 10.$$

Если отказаться от защитных интервалов, приняв меры по компенсации переходного процесса, то число каналов можно увеличить до $n = \dfrac{T_{\text{к}}}{128\dfrac{2}{\Delta f_c}} \approx 12.$

Р.7.1.10. Обозначим через X случайное отклонение рабочего импульса последнего n-го канала от начала интервала

$$X = \sum_{k=1}^{n} \Delta t_0 + a\,[X_k + (1+\Delta)|\,X_k\,|].$$

Потребуем, чтобы с вероятностью, близкой к 1 (например, 0,999), случайная величина X не выходила за пределы тактового интервала $T_{\text{к}}$:

$$\int_{n\Delta t_0}^{T_k} w_1(x)\,dx = 0{,}999.$$

Введем новую положительную случайную переменную $Y = \frac{X - n\Delta t_0}{a} = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, где $Y_k = X_k + (1+\Delta)\,|X_k|$. Допустимое число каналов n найдем из условия $\int\limits_0^{\frac{1}{a}(T_\text{к} - \Delta t_0 n)} w_1(y)\,dy = 0{,}999$. Найдем распределение положительной случайной величины $Y_k = X_k + (1+\Delta)\,|X_k|$:

$$Y_k = \begin{cases} \Delta|X_k| \text{ при } X_k < 0, \\ (2+\Delta)\,|X_k| \text{ при } X_k > 0. \end{cases}$$

Поскольку X_k имеет нормальное распределение с нулевым средним

$$w_1(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x_k < \infty,$$

то для распределенимя Y_k получаем

$$w_1(y_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2\sigma^2}} \exp\left(\frac{y_k^2}{2\sigma^2\Delta^2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi(2+\Delta)^2\sigma^2}} \exp\left(-\frac{y_k^2}{2\,(2+\Delta)^2\sigma^2}\right), \quad y_k \geqslant 0.$$

Точное выражение для распределения суммы n независимых слагаемых Y_k получить затруднительно.

В области $\sigma^2 \ll 1$ распределение суммы n независимых односторонне — нормально распределенных случайных величин $\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$ можно аппроксимировать распределением

$$w(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta^2 n}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2\Delta^2 n}\right), \quad y \geqslant 0.$$

Из условия $\int\limits_0^{\frac{1}{a}[T_\text{к} - n\,\Delta t_0]} w(y)\,dy = 0{,}999$ следует $\Phi\left(\frac{T_\text{к} - n\,\Delta\, t_0}{a\,\sigma\Delta\sqrt{n}}\right) = 0{,}999$ или $(T_k - n\Delta t_0) = 3{,}5 a\sigma\Delta\sqrt{n}$. Выбирая $\Delta t_0 = \tau_\text{и}$ (длительность элементарной посылки), полагая $n_1\tau_\text{и} \ll T_\text{к}$ (n_1 — число каналов в системе ИИМ) и $\Delta = 5$, имеем $17{,}5\sqrt{n_1} = \frac{T_\text{к}}{a\sigma}$. Для системы ФИМ: $6n = \frac{T_\text{к}}{a\sigma}$.

Откуда $\sqrt{n_1} = 6n/17{,}5 = 0{,}3n$ или $n_1 = n^2 0{,}1$. Если, как обычно, в системе ФИМ $n \approx 20$, то $n_1 = 400 \cdot 0{,}1 = 40$, $n_1/n = 2$. Если $n = 30$, то $n_1 = 90$, $n_1/n = 3$. При $n = 40$ $n_1 = 160{,}0$, $n_1/n = 4$.

Р.7.1.11. Сигнал на выходе неискажающего *ФНЧ* (при единичном коэффициенте передачи всего приемного устройства) можно получить фильтрацией продукта $s_\Sigma(t)c_1(t)$. Имеем $y_1(t) = \overset{\circ}{X}_1(t)\cos\Delta - \overset{\circ}{X}_2(t)\sin\Delta$. Первое слагаемое в этом выражении является полезным сигналом, а второе — переходной помехой.

Отношение *переходная помеха/сигнал* на выходе 1-го канала

$$\frac{P_{\text{п.п}}}{P_{\text{с}}} = \frac{\overline{\overset{\circ}{X}{}_2^2}\sin^2\Delta}{\overline{\overset{\circ}{X}{}_1^2}\cos^2\Delta} = \mathrm{tg}^2\,\Delta.$$

Такой же результат следует и для второго канала. Из условия $\mathrm{tg}^2\,\Delta \leqslant 0{,}1$ получаем допустимую расстройку фазы $\Delta = 17{,}5°$.

Р.7.1.12. Амплитудный спектр группового сигнала системы МС-5 показан на рис. 7.7. В данной системе спектры индивидуальных сигналов существенно перекрываются.

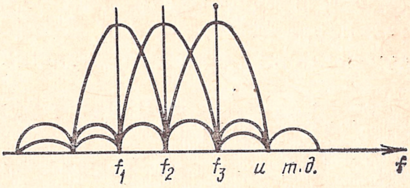


Рис. 7.7. Амплитудный спектр группового сигнала многоканальной системы связи с ортогональными сигналами МС-5

Для надежного разделения каналов на интервале анализа должно выполняться условие ортогональности индивидуальных сигналов

$$\int_0^{T_\text{а}} \cos(2\pi f_i t + \varphi_i)\cos(2\pi f_k + \varphi_k)\,dt = 0,\ i \neq k,$$

или

$$f_i = \frac{1}{2T_\text{а}}(2i + N),\ i = 1,\ 2,\ \ldots$$

Поскольку разнос между соседними канальными частотами

$$\Delta f = f_{i+1} - f_i = \frac{1}{2T_\text{а}}[2(i+1) + N - 2i - N] = \frac{1}{T_\text{а}},$$

получаем $T_а=1/\Delta f=7{,}04$ мс. Интервал $\Delta T=T-T_а=1{,}393$ мс используется для гашения колебаний соседних посылок.

Р.7.1.13. Согласно условию разделения (7.5)

$$\int_0^T X_k(t)\cos(\omega_0 t+\varphi_0)\, X_l(t+\tau)\cos[\omega_0(t+\tau)+\varphi_0]\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\omega_0\tau\int_0^T X_k(t)\,X_l(t+\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int_0^T X_k(t)\,X_l(t+\tau)\times$$

$$\times\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau+2\varphi_0)\,dt=0.$$

При $T\gg 2\pi/\omega_0$ и узкополосных канальных сигналах ($1/\tau\ll f_0$) вторым интегралом можно пренебречь. В этом случае индивидуальные сигналы могут быть разделены при $B_{kl}(\tau)=\int\limits_0^T X_k(t)X_l(t+\tau)dt=0$, т. е. если двоичные последовательности, образующие «адреса» отдельных каналов, ортогональны при произвольном взаимном сдвиге.

Если в качестве индивидуальных сигналов использовать последовательности Хаффмена с большим числом элементов за период повторения N_k и N_l, то

$$B_{kl}(\tau)=\frac{1}{N_k N_l}\approx 0 \quad \text{(этот результат получен в [16]).}$$

Р.7.1.14. Заданной реализации частотно-временной матрицы соответствует сигнал, показанный на рис. 7.8*а*. На выходе четырех амплитудных детекторов выделяются видеоимпульсы, взаимное расположение которых показано на рис. 7.8*б*. Четыре линии задержки обеспечивают совмещение во времени отдельных видеоимпульсов, а суммарный сигнал с амплитудой $4h$, превышая порог схемы совпадения *СС*, выдает на выходе рабочий импульс, по которому считывается информация (при передаче аналоговой информации посредством ФИМ она заложена в положение импульса относительно точки отсчета).

Полагая, что в каждой адресной комбинации используются четыре импульса (занимающих определенные положения из 17 возможных) с различными мгновенными частотами, нетрудно написать выражение для числа возможных кодовых комбинаций (числа каналов уплотнения):

$$4!\,C_{16}^{3} = 24\cdot 560 = 13\,440,$$

где $C^3{}_{16}$ — это число сочетаний, которое можно выполнить при фиксации первого импульса (остается 16 свободных мест для размещения трех импульсов); 4! — это число возможных перестановок из четырех, определяющее разнообразие взаимного размещения четырех импульсов с различными мгновенными частотами.

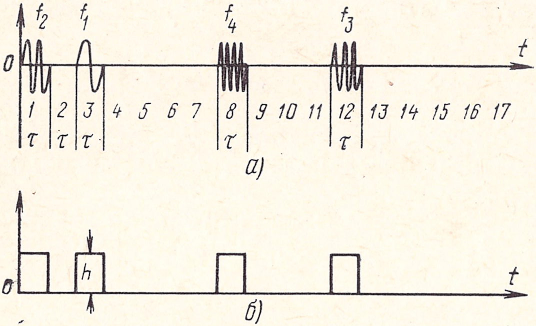


Рис. 7.8. Канальный сигнал асинхронно-адресной системы связи *(а)* и сигналы на выходе амплитудных детекторов *(б)*

Р.7.1.15. Каждый импульс, несущий информацию об отсчете передается в асинхронно-адресной системе посредством l-разрядной кодовой комбинации. Для многоканальной системы с ФИМ должно выполняться условие

$$n\,[\Delta\, t_{\text{макс}} + (l - 1)\,\tau] = T_k = \frac{1}{2F_{\text{макс}}}\,.$$

Полагая $n = 13\,440$, $F_{\text{макс}} = 3400$ Гц, $l = 17$, $\Delta t_{\text{макс}} = 128\tau$, получаем

$$\tau = \frac{1}{2F_{\text{макс}}n\,[l - 1 + 128]} = 7{,}4\cdot 10^{-11}\ \text{с}.$$

Полоса канального сигнала $F_{\text{к}} \approx \dfrac{2}{\tau} = 2{,}7\cdot 10^{10}$ Гц.

Р.7.1.16. Согласно (5.32) вероятность ошибки в четырехпозиционной системе ДЧМ в гауссовом канале с неопределенной фазой при больших отношениях *сиг-*

нал/шум и оптимальном некогерентном приеме

$$p_4 \approx \frac{3}{2}\exp\left(-\frac{h_0^2}{2}\right).$$

Из таблицы состояний (см. табл. 7.1) для ДЧМ следует, что лишь в двух из трех случаев ошибочного решения о переданной частоте группового сигнала символы в индивидуальных каналах будут зарегистрированы ошибочно. Поэтому вероятность ошибки в индивидуальном двоичном канале

$$p_{\text{ош}} = \frac{2}{3}p_4 \approx \exp\left(-\frac{h_0^2}{2}\right).$$

Р.7.1.17. Рассматривая рис. 7.9, можно заметить, что сигналы отдельных позиций ДФМ можно представить как результат суммирования двух независимых двоичных сигналов ФМ с амплитудой $a/\sqrt{2}$, сдвинутых друг относительно друга на $\pi/2$. Средняя мощность этих сигналов в 2 раза меньше, чем у суммарного сигнала ДФМ. Следовательно, при оптимальном приеме в случае точно известных параметров сигнала вероятность ошибки в каждом двоичном канале $p = \frac{1}{2}[1 - \Phi(\sqrt{h_0^2})]$. Очевидно, что для системы ДОФМ $p \approx 1 - \Phi(\sqrt{h_0^2})$.

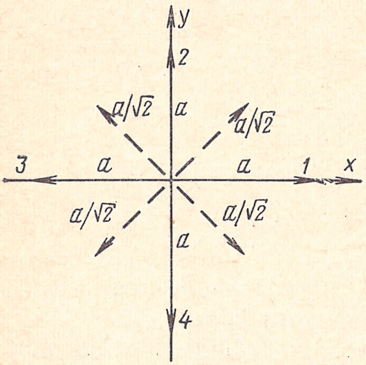


Рис. 7.9. Векторная диаграмма сигнала ДФМ

7.2. Характеристики эффективности и информационные характеристики многоканальных систем

Имея в виду, что в канале действует флуктуационный шум с энергетическим спектром $G_{\text{ш}}$, будем сравнивать две n-канальные системы, обеспечивающие одинаковую верность и одинаковую суммарную скорость передачи информации $I'_n = \text{const}$ по параметру эквивалентного отношения *сигнал/шум*

$$h^2_{\text{э}n} = \frac{P_{\text{с}n}}{G_{\text{ш}} I'_n}. \tag{7.9}$$

Здесь $P_{\text{с}n}$ — средняя мощность канального сигнала в n-канальной системе.

Энергетический выигрыш перехода от i-й n-канальной системы к j-й в децибелах при фиксированной верности и скорости передачи информации

$$\eta_{i/j} = 10 \lg \frac{h^2_{\text{э}ni}}{h^2_{\text{э}nj}} = 10 \lg \frac{P_{\text{с}ni}}{P_{\text{с}nj}}. \tag{7.10}$$

Энергетическая цена уплотнения

$$\xi_P(n) = \frac{P_{\text{с}n}}{P_{\text{с}1}} \tag{7.11}$$

показывает, во сколько раз необходимо увеличить среднюю мощность сигнала в n-канальной системе по сравнению с одноканальной, чтобы при той же спектральной плотности мощности помех обеспечить неизменную верность приема в каждом канале. Очевидно,

$$\eta_{i/j} = 10 \lg \left[\frac{\xi_P(n)_i}{\xi_P(n)_j} \frac{h^2_{\text{э}i_1}}{h^2_{\text{э}j_1}} \right] = \eta_{i/j_1} + 10 \lg \frac{\xi_P(n)_i}{\xi_P(n)_j}, \tag{7.12}$$

где η_{i/j_1} — энергетический выигрыш перехода от i-й системы к j-й в одноканальном режиме при неизменных верности и скорости передачи информации $I'_1 = \text{const}$.

Если i-я и j-я системы отличаются только способом уплотнения канала, то

$$\eta_{i/j} = 10 \lg \frac{\xi_P(n)_i}{\xi_P(n)_j}. \tag{7.13}$$

Эффективность использования n-канальной системой полосы частот F_n определяется коэффициентом

$$\nu_n = \frac{I'_n}{F_n} = \frac{\mu_n I'_1}{F_n} = \frac{\mu_n \nu_1}{\xi_F(n)}. \tag{7.14}$$

В этом выражении μ_n — коэффициент увеличения скорости передачи информации в n-канальной системе по сравнению с одноканальной;

$$\xi_F(n) = \frac{F_n}{F_1} \tag{7.15}$$

— это спектральная цена уплотнения, которая показывает, во сколько раз необходимо увеличить занимаемую n-канальной системой полосу частот по сравнению с одноканальной системой; ν_1 — эффективность использования полосы частот одноканальной системой. Если для многоканальной системы $\mu_n = \xi_F(n) = n$, то $\nu_n = \nu_1$. Выигрыш η_F по эффективности использования полосы частот при переходе от i-й системы j-й определим отношением параметров ν_n в сравниваемых системах. Коэффициент эффективности многоканальной системы при передаче сообщений по независимым каналам

$$K_с = \frac{C_с}{C_\Sigma} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} C_{сk}}{\sum\limits_{k=1}^{n} C_k} . \tag{7.16}$$

Здесь C_k — пропускная способность k-го канала при заданном способе уплотнения; $C_{сk}$ — пропускная способность расширенного k-го канала.

Уплотнение существующих каналов связи с заданной пропускной способностью C независимыми источниками приводит к существенному повышению эффективности связи.

При фиксированных средней или пиковой мощности передатчика многоканальной системы, типе канала и суммарной скорости передачи информации можно при передаче дискретных сообщений для отдельного канала определить выигрыш по эквивалентной вероятности ошибки перехода от i-й системы к j-й: $\alpha_{i/j} = p_{эi}/p_{эj}$ (см. § 4.3).

При тех же условиях в случае передачи непрерывных сообщений можно определить выигрыш по отношению *сигнал/шум* на выходе детектора в отдельном канале при переходе от *i-й* системы к j-й.

Задачи

7.2.1. В полосе стандартного телефонного канала шириной $F = 3100$ Гц необходимо передавать информацию от независимых двоичных источников без избыточности с производительностью $H' = 1/T_\Sigma = 50$ бит/с. Показать, что при использовании уплотнения по форме, частотной манипуляции в отдельных каналах и согласованной фильтрации в месте приема в указанной полосе при неопределенной фазе сигнала можно передать информацию от $n = 31$ источников. Показать, что при использовании классического частотного уплотнения (полосовых фильтров в месте приема) и частотной манипуляции в отдельных каналах число каналов уплотнения $n = 10$. Найти коэффициент использования полосы частот двоичной ЧМ в одноканальном режиме ν_1 при приеме посредством согласованного и полосового фильтра, а также для обеих систем уплотнения спектральную цену уплотнения $\xi_F(n)$, коэффициент увеличения скорости передачи информации μ_n и коэффициент использования полосы частот ν_n.

7.2.2. Пусть многоканальные системы частотного уплотнения с согласованными фильтрами и полосовыми фильтрами, рассмотренные в задаче 7.2.1, обеспечивают одинаковую скорость передачи информации (ценой определенного расширения полосы частот, занимаемой второй системой) и верность. Показать, что энергетический выигрыш перехода к системе с согласованными фильтрами равен 3 (4,8 дБ) и не зависит от числа каналов уплотнения.

7.2.3. Система с частотным уплотнением образуется путем однополосной модуляции поднесущих и частотной модуляции общей несущей (система ОМ—ЧМ). Будем считать системой «А» многоканальную систему ОМ—ЧМ, у которой девиация частоты Δf не меняется с изменением числа каналов n, а системой «Б» — многоканальную систему ОМ—ЧМ, у которой Δf растет пропорционально числу каналов n.

Показать, что энергетический выигрыш перехода от системы «А» к системе «Б» равен $\eta_{\text{А/Б}} = 10 \lg n^2$, что достигается ценой расширения занимаемой полосы частот в n раз.

7.2.4. Для передачи информации от n независимых двоичных источников без избыточности с производительностью H' могут быть использованы две системы: «А» — синхронная многочастотная система с согласованными фильтрами и относительной двоичной манипуляцией на каждой поднесущей; «Б» — синхронная одночастотная система с временны́м уплотнением (многократная система) и относительной двоичной манипуляцией несущей.

Пиковая мощность передатчика считается заданной, канал без искажений, с неопределенной фазой и белым гауссовским шумом. Показать, что при одинаковой эффективности использования полосы частот канала система «Б» обеспечивает выигрыш по эквивалентной вероятности ошибки по сравнению с системой «А»: $\alpha_{\text{А/Б}} = \exp\left[h^2_{\text{Б}}\left(1 - \frac{1}{n^{\varkappa-1}}\right)\right]$, где $1 \leqslant \chi \leqslant 2$ — коэффициент, характеризующий нелинейность передатчика, а $h^2_{\text{А}}$ — отношение *сигнал/шум* в отдельном канале системы «А».

7.2.5. Определить энергетический проигрыш по отношению *сигнал/шум* на выходе детектора индивидуального канала и спектральный проигрыш перехода от двухканальной системы фазового уплотнения, рассмотренной в задаче 7.1.11 (при $\Delta = 0$), к двухканальной системе частотного уплотнения с групповым сигналом

$$s_{\Sigma}(t) = \overset{\circ}{X}_1(t)\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \overset{\circ}{X}_2(t)\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

при одинаковой пиковой мощности передатчика. Разнос между средними частотами каналов считать равным удвоенной ширине спектра модулирующего сигнала $\overset{\circ}{X}_i(t)$. Пикфактор модулирующего сигнала $\Pi = 3$.

7.2.6. Найти спектральный выигрыш перехода от асинхронной системы частотного уплотнения ЧМ—ЧМ, предназначенной для передачи $n = 13\,440$ независимых речевых сообщений к асинхронно-адресной системе на такое же число каналов[1], рассмотренной в задаче 7.1.15. Считая, что обе системы работают при больших отношениях *сигнал/шум* (выше пороговых) и обеспечивают одинаковую верность при одинаковом отношении *сигнал/шум* в канале, определить энергетический проигрыш перехода от системы «АА» к ЧМ — ЧМ.

7.2.7. Определить энергетический выигрыш и выигрыш по эффективности использования полосы частот при переходе от двухканальной системы частотного уплотнения с частотной манипуляцией, предназначенной для передачи независимых сообщений от двоичных источников без избыточности, к системе ДЧМ. Считать, что пиковая мощность передатчика фиксирована, в канале действует нормальный белый шум, сигнал известен с точностью до фазы и осуществляется оптимальный некогерентный прием.

7.2.8. Определить энергетический выигрыш и выигрыш по эффективности использования полосы частот при переходе от двухканальной системы частотного или временно́го уплотнения к системе ДОФМ. Считать, что во всех сравниваемых системах передается информация от двух независимых двоичных источников без избыточности, пиковая мощность передатчика фиксирована, в каждой системе осуществляется ОФМ, в канале действует нормальный белый шум, сигнал известен точно в месте приема и осуществляется оптимальный когерентный прием.

---

[1] Чтобы снизить вероятность образования ложной адресной комбинации, обычно уменьшают число одновременно используемых каналов. Однако за счет фактора неодновременной работы всех источников кратность уплотнения можно увеличить. Будем считать ее равной 13 400.

7.2.9. Определить пропускную способность 20-канальной системы частотного уплотнения с независимым нормальным белым шумом с интенсивностью, приведенной к входу передатчика $G_0=4{,}6\cdot10^{-4}$ Вт/Гц в отдельных каналах, полагая, что каждый канал занимает полосу частот $F_k=8000$ Гц, переходная помеха в каждом канале имеет характер нормального белого шума со средней мощностью, пропорциональной суммарной средней мощности остальных каналов, в передатчике фиксирована пиковая мощность $P_{\text{макс}}=100$ кВт, и работает он в строго линейном режиме.

7.2.10. Определить пропускную способность 20-канальной системы временно́го уплотнения с теми же характеристиками канала (в том числе по суммарной полосе частот $F_\Sigma=20F_{\text{к}}$) и передатчика, что в задаче 7.2.9. Сравнить значения пропускных способностей, полученных в этих двух случаях.

7.2.11. Определить коэффициент эффективности 20-канальной системы передачи независимых непрерывных гауссовских сообщений, каждое из которых занимает полосу $F_{\text{с}}=4000$ Гц и превышает по средней мощности эквивалентный равномерный по полосе нормальный шум на выходе канала в 7 раз. Сообщения передаются: а) по каналу с частотным уплотнением (задача 7.2.9), когда можно пренебречь переходным шумом; б) по каналу с временны́м уплотнением (задача 7.2.10), когда можно пренебречь переходным шумом.

7.2.12. Определить коэффициент эффективности 20-канальной системы передачи независимых сообщений от дискретных источников без избыточности с производительностью $H'=4000$ бит/с. Сообщения передаются по двум разновидностям каналов, рассмотренных в предыдущей задаче (ошибками в расширенном дискретном канале пренебречь).

7.2.13. Канал связи, имеющий большую протяженность, с общей пропускной способностью 10 000 бит/с используется при передаче информации от 100 независимых источников с производительностью 50 бит/с каждый.

Показать, что стоимость передачи 1 бита информации в уплотненном канале в 25 раз меньше, чем при использовании для каждого источника индивидуального канала с пропускной способностью 100 бит/с, если стоимость такого канала в 4 раза меньше стоимости одного уплотненного канала.

Решения и ответы

P.7.2.1. В системе с согласованными фильтрами при использовании ортогональных в усиленном смысле реализаций отдельных сигналов (для возможности приема в условиях неопределенной фазы сигнала) можно выбрать минимальный разнос между частотами $\Delta f = 1/T_\Sigma = 50$ Гц. Поэтому в полосе $F_\Sigma = 3100$ Гц можно разместить до $3100/50 = 62$ реализаций, или до 31 двоичного канала.

В системе с полосовыми фильтрами, выбрав умеренное значение разноса между частотами реализации $\Delta f = 3/T_\Sigma$ (для отстройки от переходных помех), получаем требуемую полосу частот одного канала $\Delta f_к = \frac{2-3}{T_\Sigma} = 300$ Гц (для частоты «нажатия» и «отжатия»). Поэтому в полосе $F_\Sigma = 3100$ Гц можно разместить до $\frac{3100}{300} = 10$ каналов.

Для системы с согласованными фильтрами

$$\nu_1 = \frac{50}{100} = 0{,}5 \text{ бит/Гц}; \ \xi_F(n) = \frac{3100}{100} = 31; \ \mu_n = 31;$$

$$\nu_n = \nu_1 = 0{,}5 \text{ бит/Гц}.$$

Для системы с полосовыми фильтрами

$$\nu_1 = \frac{50}{300} = 0{,}17 \text{ бит/Гц}; \ \xi_F(n) = 10; \ \mu_n = 10;$$

$$\nu_n = \nu_1 = 0{,}17 \text{ бит/Гц}.$$

Переход от системы частотного уплотнения с полосовыми фильтрами к системе с согласованными фильтрами дает выигрыш по эффективности использования полосы частот в $\eta_F \approx 3$ раза.

P.7.2.2. Если системы обеспечивают одинаковую суммарную скорость передачи, то у них равны показатели $\xi_P(n)$. Тогда согласно (7.12) искомый выигрыш η определится энергетическим выигрышем одноканального режима. Отношение *сигнал/шум* на выходе согласованного фильтра больше, чем на выходе полосового фильтра в 3 раза, так как при той же средней мощности сигнала и энергетическом спектре шума средняя мощность шума на выходе полосового фильтра возрастает в 3 раза (в это число раз шире полоса для шума в полосовом фильтре по сравнению с согласованным). Таким образом, $\eta = 4{,}8$ дБ.

Р.7.2.3. Найдем сначала энергетическую цену уплотнения для системы «А». Индекс частотной модуляции $\beta_{\text{ЧМ}}=\frac{\Delta f_{\Sigma}}{F_{\Sigma}}=\frac{\Delta f_1}{nF_1}$, где Δf_1 — девиация частоты при одноканальном режиме, F_1 — занимаемая одним каналом полоса частот. Если мощность сигнала на входе приемника остается неизменной, то отношение мощности группового сигнала на выходе частотного детектора $P_{\Sigma\text{вых}}$ к спектральной плотности мощности шума $G_{0\text{вых}}$ пропорционально $\beta^2_{\text{ЧМ}}$ (см. Р.2.4.8) и обратно пропорционально n^2. Если среднюю мощность передатчика увеличить в n^2 раз, то отношение $(P_{\Sigma}/G_0)_{\text{вых}}$ останется неизменным. Но по определению энергетической цены уплотнения должно оставаться неизменным отношение $(P_1/G_0)_{\text{вых}}$ средней мощности индивидуального сигнала на выходе приемника к спектральной плотности мощности шума. При статистической независимости сигналов отдельных каналов $P_1=P_{\Sigma}/n$. Поэтому энергетическая цена уплотнения системы «А» $\xi_P=n^3$. Поскольку в системе «А» рост числа каналов не сопровождается расширением полосы частот (так как девиация не меняется), то спектральная цена уплотнения $\xi_F(\text{А})=1$.

В системе «Б» будем считать, что девиация частоты меняется пропорционально числу каналов n, но тогда $(P_{\Sigma}/G_0)_{\text{вых}}$, и вместе с тем и $\beta_{\text{ЧМ}}$ не зависит от n. Следовательно, для того чтобы сохранить неизменным $(P_1/G_0)_{\text{вых}}$ (качество связи), достаточно увеличить среднюю мощность передатчика в многоканальном варианте в n раз: $\xi_P=n$. Спектральная цена системы «Б» $\xi_F(\text{Б})=n$.

Согласно (7.13) энергетический выигрыш перехода от системы «А» к системе «Б» $\eta_{\text{А/Б}}=10\lg\frac{n^3}{n}=10\lg n^2$, что достигается проигрышем в эффективности использования полосы частот в $\eta_F=\frac{\xi_F(\text{Б})}{\xi_F(\text{А})}=n$ раз.

Р.7.2.4. Системы «А» и «Б», передавая одинаковое количество информации в единицу времени, занимают и одинаковую полосу частот: $\Delta f=v_{\text{и}}n$, поскольку система «А» использует n частот, а система «Б» одну частоту, но рабочие посылки в n раз короче, чем в системе «А».

Следовательно, сравниваемые системы одинаково эффективно используют полосу частот.

Эквивалентная вероятность ошибки при оптимальном некогерентном приеме двоичных сигналов с ОФМ $p_{эi} = \frac{1}{2}\exp(-h^2{}_i)$, где $h^2{}_i = P'{}_i T_i / G_ш$ — отношение энергии посылки сигнала в отдельном канале в i-й системе к спектральной плотности мощности шума. Для системы «Б» $h^2_Б = \frac{P_{макс} T_А}{G_ш \Pi_1^2 n}$, так как длительность посылки $T_Б = T_А/n$, а средняя мощность в каждом канале временного уплотнения $P_Б$ равна средней мощности передатчика $\frac{P_{макс}}{\Pi_n^2} = \frac{P_{макс}}{\Pi_1^2}$, поскольку для одночастотной системы пикфактор по мощности группового сигнала $\Pi^2{}_n$ равен пикфактору индивидуального сигнала.

Для системы «А»

$$h^2_А = \frac{P_{макс} T_А}{\Pi_1^2 n^\chi G_ш},$$

поскольку средняя мощность индивидуального сигнала в системе «А»

$$P_А = \frac{P_n}{n} = \frac{P_{макс}}{\Pi_n^2 n} = \frac{P_{макс}}{\Pi_1^2 n^\chi},$$

где P_n — средняя мощность группового сигнала; $\Pi^2{}_n = \Pi^2{}_1 n^{\chi-1}$ — пикфактор для многочастотной системы, а χ — коэффициент, характеризующий нелинейность передатчика и лежащий в пределах от 1 до 2. Действительно, если бы амплитудная характеристика группового тракта была строго линейной (высокая линейность здесь важна для снижения переходных помех между каналами, которые могут возникнуть при нелинейности из-за появления комбинационных частот) и если допустить, что индивидуальные сигналы, являясь отрезками синусоиды, могут складываться в фазе, то $P_{макс} = n^2 P_{макс1}$. Средняя мощность группового сигнала при независимости каналов $P_n = P_1 n$, откуда $\Pi^2{}_n = \frac{P_{макс}}{P_n} = n\Pi_1^2$ и $\chi = 2$. Если допустить некоторую нелинейность группового тракта и считать, что сложение всех индивидуальных сигналов в фазе маловероятно (или принимать специальные меры по их расфазированию), то χ будет меньше 2, но больше 1. Выигрыш по эквивалентной вероятности ошибки при переходе от системы «А» к системе «Б»

$$\alpha_{А/Б} = \frac{p_{эА}}{p_{эБ}} = \exp\left[h_Б^2\left(1 - \frac{1}{n^{\chi-1}}\right)\right].$$

Р.7.2.5. При использовании синхронного детектора в системе фазового уплотнения отношение *сигнал/шум* на выходе

$$\left(\frac{P_с}{P_ш}\right)_{вых} = \frac{P_{макс}}{2\cdot 2G_ш F_с \Pi_1^2}.$$

Для системы частотного уплотнения (при синхронном детектировании)

$$\left(\frac{P_с}{P_ш}\right)_{вых} = \frac{P_{макс}}{\Pi_1^2 n^\chi 2G_ш F_с}.$$

Отсюда получаем

$$\eta_{А/Б} = \frac{2^{\chi+1}}{4} = 2^{\chi-1}.$$

В системе фазового уплотнения полоса группового сигнала равна $2F_с$. В системе частотного уплотнения полоса группового сигнала при разносе между канальными частотами $2F_с$ равна $4F_с$.

Спектральный проигрыш при переходе от системы фазового уплотнения к системе частотного уплотнения равен 2.

Р.7.2.6. Очевидно, что для системы частотного уплотнения ЧМ — ЧМ $F_к = 3400\cdot 2\beta n\ 2\beta_1 = 1{,}82\cdot 10^8\beta\beta_1$ Гц, где β, β_1—индексы модуляции поднесущих и несущей соответственно. Для асинхронно-адресной системы $F_{кАА} = 2{,}7\cdot 10^{10}$ Гц (см. Р.7.1.15).

Спектральная цена перехода от системы частотного уплотнения к асинхронно-адресной системе при $\beta = \beta_1 = 10$

$$\frac{F_{ЧМ-ЧМ}}{F_{АА}} = \frac{1{,}82\beta\beta_1\cdot 10^8}{2{,}7\cdot 10^{10}} = 6{,}75\cdot 10^{-1}.$$

Найдем теперь энергетический проигрыш перехода от асинхронно-адресной системы к системе частотного уплотнения типа ЧМ—ЧМ. Отношение *сигнал/шум* в канале для асинхронно-адресной системы $\frac{P_{макс\ АА}}{G_ш F_{АА}}$. Для системы частотного уплотнения ЧМ—ЧМ отношение *сигнал/шум* $\frac{P_{макс\ ЧМ-ЧМ}}{n\, G_ш F_{ЧМ-ЧМ}}$

Полагая, что в обеих системах отношение *сигнал/шум* одинаково, находим, что при найденном проигрыше по полосе переход от системы ЧМ—ЧМ к асинхронно-адресной системе дает энергетический прогрыш в

$$\frac{P_{\text{максАА}}}{P_{\text{максЧМ—ЧМ}}} = \frac{nF_{\text{ЧМ—ЧМ}}}{F_{\text{АА}}} = 9{,}1 \cdot 10^3 \text{ раз (39,6 дБ)}.$$

Р.7.2.7. Очевидно, что пиковая мощность сигнала в системе ДЧМ равна пиковой мощности передатчика $P_{\text{макс}}$ и $h^2{}_{\text{ДЧМ}} = \frac{P_{\text{макс}} T}{G_{\text{ш}}}$. В двухканальной системе ЧМ пиковая мощность индивидуального сигнала $P_{\text{макс}1} = \frac{P_{\text{макс}}}{2\chi}$. При строго линейном режиме передатчика $(\chi = 2)$

$$P_{\text{макс 1}} = \frac{1}{4} P_{\text{макс}} \text{ и } h^2_{2\text{ЧМ}} = \frac{h^2_{\text{ДЧМ}}}{4}.$$

Следовательно, в этом случае $\eta_{2\text{ЧМ/ДЧМ}} = 6$ дБ. Если допустить нелинейность в передатчике $(\chi = 1)$, то $\eta_{2\text{ ЧМ/ДЧМ}} = 3$ дБ. Поскольку двухканальная система ЧМ занимает примерно ту же полосу частот, что и система ДЧМ, коэффициент эффективности использования полосы при одинаковых объемах передаваемой информации будет одинаков для этих систем.

Р.7.2.8. Согласно (7.13) для систем, отличающихся только способом уплотнения, энергетический выигрыш перехода от одной системы к другой

$$\eta_{i/j} = 10 \lg \frac{\xi_P(n)_i}{\xi_P(n)_j},$$

где $\xi_P(n)_i$ — энергетическая цена уплотнения i-й системы. Для системы ДОФМ $\xi_P(2) = 2$. Легко убедиться, что для двухканальной системы временно́го уплотнения $\xi_P(2) = 2$, так как сокращение длительности посылки в 2 раза требует увеличения мощности передатчика в 2 раза для сохранения неизменной верности. При частотном уплотнении средняя мощность сигнала одного канала уменьшается в 2 раза (для двухканальной системы) и $\xi_P(2) = 2$. Следовательно, $\eta_{i/j} = 0$ дБ. Выигрыш по эффективности использования полосы частот при переходе от двухканальной системы частотного или временно́го уплотнения к системе ДОФМ равен 2, так как полоса ДОФМ такая же, как и у одноканальной системы ФМ, а у систем частотного и временно́го уплотнения она в 2 раза больше.

Р.7.2.9. Пропускную способность n-канальной системы в рассматриваемом канале определим по формуле

$$C_\Sigma=\sum_{k-1}^{n}C_k=\sum_{k=1}^{n}F_k\log\left[1+\frac{P_{ck}}{G_ш F_k+\lambda\,(n-1)P_{ck}}\right].$$

Средняя мощность в отдельном канале n-канальной системы

$$P_{ck}=\frac{P_{макс}}{\Pi^2(n)n}=\frac{P_{макс}}{n^\chi\,\Pi_1^2}\,.$$

С учетом этого для пропускной способности n-канальной системы частного уплотнения получаем

$$C_\Sigma=nF_k\log\left[1+\frac{P_{макс}}{n^\chi\,\Pi_1^2\left[F_kG_ш+\lambda\,(n-1)\,\dfrac{P_{макс}}{n^\chi\,\Pi_1^2}\right]}\right].$$

Если $\lambda(n-1)\ P_{ck}\ll G_шF_k$ (переходной помехой можно пренебречь), то при строго линейном режиме передатчика ($\chi=2$)

$$G_\Sigma=nF_k\log\left[1+\frac{P_{макс}}{n^2\,\Pi_1^2\,G_ш\,F_k}\right]=4{,}8\cdot10^5\ бит/с.$$

Если $\lambda(n-1)P_{ck}\gg G_шF_k$, то в указанных условиях

$$C_\Sigma=nF_k\log\left[1+\frac{1}{\lambda\,(n-1)}\right]$$

(это соответствует значению коэффициента

$$\lambda\gg\frac{G_шF_k}{P_{ck}(n-1)}\approx10^{-3}\Bigg).$$

Например, при $\lambda=10^{-1}$ $G_\Sigma=9{,}4\cdot10^3$ бит/с.

Р.7.2.10. Пропускная способность 20-канальной системы временно́го уплотнения

$$C_\Sigma=20F_k\log\left[1+\frac{P_{макс}}{\Pi_1^2\left[G_ш20F_k+\lambda\,(n-1)\,\dfrac{P_{макс}}{\Pi_1^2}\right]}\right].$$

Если пренебречь переходной помехой, то

$$C_\Sigma=20F_k\log\left[1+\frac{P_{макс}}{\Pi_1^2\,20F_kG_ш}\right]=1{,}6\cdot10^6\ бит/с,$$

что в 30 раз больше, чем при частотном уплотнении. При переходной помехе, существенно превышающей флуктуационный шум в канале, пропускная способность этих двух систем одинакова.

Р.7.2.11. Найдем пропускную способность системы передачи 20 независимых сообщений, каждое из которых занимает полосу $F_с=4000$ Гц, при отношении *сигнал/шум* на выходе канала, равном 7:

$$C_с = 20F_с \log\left[1 + \left(\frac{P_с}{P_ш}\right)_{вых}\right] = 2{,}4\cdot10^5 \text{ бит/с}.$$

Коэффициент эффективности системы при использовании канала с частотным уплотнением (задача 7.2.9)

$$K_с = \frac{C_с}{C_\Sigma} = \frac{2{,}4\cdot10^5}{4{,}8\cdot10^5} = 0{,}5.$$

При использовании канала с временны́м уплотнением (задача 7.2.10)

$$K_с = \frac{C_с}{C_\Sigma} = \frac{2{,}4\cdot10^5}{1{,}6\cdot10^6} = 0{,}15.$$

Р.7.2.12. В данном случае пропускная способность системы

$$C_с = nH' = 8\cdot10^4 \text{ бит/с}.$$

Коэффициент эффективности системы, использующей канал с частотным уплотнением (задача 7.2.9), $K_с=0{,}167$. Коэффициент эффективности системы, использующей канал с временны́м уплотнением (задача 7.2.10), $K_с=0{,}05$.

Р.7.2.13. Пусть стоимость канала с пропускной способностью $C=10\,000$ бит равна A, а стоимость канала с пропускной способностью $C=100$ бит — $A/4$. Если для каждого источника использовать свой канал, то суммарные затраты составят $A/4\cdot100=25A$. Поскольку по уплотненному каналу и по 100 индивидуальным каналам передаются одинаковые объемы информации, можем заключить, что стоимость передачи одной единицы информации в уплотненном канале обходится в 25 раз дешевле, чем при использовании отдельных каналов для каждого источника.

Глава 8

ЗАДАЧИ НА ВЫБОР НАИЛУЧШЕГО ВАРИАНТА СИСТЕМЫ СВЯЗИ

8.1. Для передачи двоичных сообщений используется избыточный код (3,1) с разрешенными кодовыми комбинациями $\bar{Б}_1 = 1\,1\,1$ и $\bar{Б}^2 = 0\,0\,0$. В канале связи действует мощная импульсная помеха, причем вероятность поражения такой помехой одного элементарного символа $p_0 = 10^{-2}$. Какой способ приема (поэлементный или в целом) следует предпочесть в данном случае, если при попадании импульсной помехи в тракт обработки сигнала вероятность ошибочного приема равна 1/2 (см. § 9.4 [12])[1]?

8.2. Для передачи двоичной информации в гауссовском канале с неопределенной фазой и ортогональными в усиленном смысле сигналами использован код (3,1) с кодовыми комбинациями $\bar{Б}_1 = 000$ и $\bar{Б}_2 = 111$. Предполагается осуществлять прием либо в целом, либо поэлементный. Какой способ приема следует предпочесть, если требуется обеспечить наименьшую эквивалентную вероятность ошибки при отношении сигнал/шум $h^2_0 = 10$ (см. § 4.3 в данной книге; § 9.4 [12])?

8.3. В системе связи предназначенной для работы в канале с рэлеевскими замираниями, можно использовать код (7.4) или примитивный код (n, n).

Какой код следует применить при а) быстрых и б) медленных замираниях, если вероятность ошибки в элементарном символе $p_0 = 10^{-4}$ и требуется получить наибольший энергетический выигрыш при одинаковой эквивалентной вероятности ошибки (см. § 4.3 в данной книге; § 5.3 [12])?

8.4. В гауссовском канале с постоянными параметрами передачу двоичной информации можно осуществить посредством амплитудной или фазовой модуляции. Какую из этих двух систем целесообразнее применить с точки зрения экономии мощности передатчика, если вероятность ошибки в элементарном символе $p_0 = 10^{-4}$, а скорость передачи информации $I' = 200$ бит/с (§ 5.5 [12])?

---

[1] Здесь и далее указаны параграфы источников, которые следует изучить при решении задач.

8.5. Десятипозиционная система передачи дискретной информации используется в гауссовском канале с постоянными параметрами при $h^2{}_0 = 12{,}5$. Какой способ модуляции (ЧМ или ФМ) следует применить для обеспечения наименьшей эквивалентной вероятности ошибки (см. § 5.5 данной книги; § 6.9 [12])?

8.6. В канале с неопределенной фазой и флуктуационным шумом предполагается использовать либо двоичную, либо пятипозиционную систему ЧМ. Какую систему следует выбрать при $p_э = 10^{-3}$ и $I' = \mathrm{const}$, руководствуясь минимальными затратами энергии (см. § 5.5 данной книги; § 6.9 [12])?

8.7. В двоичной системе связи с активной паузой, ортогональной в усиленном смысле (ЧМ) при медленных рэлеевских замираниях, необходимо обеспечить вероятность ошибки $p_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ при $h^2 = 10$. Какой способ приема (одиночный или разнесенный с автовыбором наиболее сильного сигнала) следует в этом случае применить и какое количество ветвей разнесения нужно использовать при разнесенном приеме (см. § 9.3 [12])?

8.8. В радиоканале с селективными замираниями требуется в полосе 0,3—3,4 кГц осуществить передачу дискретной информации от 24 независимых источников, каждый из которых имеет производительность 50 бит/с. Какую из двух систем связи следует применить в этом случае (МС или СИИП), если требуется обеспечить максимальную возможную помехоустойчивость по отношению к флуктуационной помехе при фиксированной пиковой мощности передатчика и минимуме помех между каналами (см. § 7.2 данной книги; [1]; [13]; § 8.2 [12])?

8.9. В канале связи с рэлеевскими замираниями обеспечивается среднее отношение *сигнал/шум* $\overline{h^2} = 10^3$. При скорости передачи $I' = 2400$ бит/с предполагается использование узкополосной системы типа СИИП ($F_1 = 3$ кГц) и широкополосной системы типа «Рейк» ($F_2 = 100$ кГц). Какую систему следует предпочесть в каждом из следующих случаев: а) однолучевой канал; б) двухлучевой канал с независимыми замираниями и временем запаздывания между лучами $\tau \approx 0{,}02$ мс; в) двухлучевой канал с независимыми замираниями и временем запаздывания между лучами $\tau=0{,}5$ мс; г) двухлучевой канал с независимыми замираниями, $\tau=0{,}5$ мс, в канале действует мощная сосредоточенная помеха, причем среднее число сосредоточенных помех в полосе 10^6 Гц $N=10$ (считать, что попадание сосредоточенной помехи в канал приводит к сбою связи) (см. [13]; § 9.6 [12])?

8.10. В системе космической связи предполагается передавать непрерывное телеметрическое сообщение, имеющее полосу $F_с=3$ кГц, пикфактор $\Pi=3$ и единичную мощность.

На входе приемника действует флуктуационный шум со спектральной плотностью мощности $G_ш=1{,}2\cdot10^{-5}$ мкВт/Гц. Коэффициент передачи канала по мощности $\gamma=10^{-6}$. Какой способ модуляции следует использовать (ЧМ или КИМ — ЧМ), если имеется возможность осуществить оптимальный некогерентный прием сигналов КИМ—ЧМ или оптимальный прием сигналов ЧМ, полагая, что мощность передатчика на борту спутника не должна превышать 10 Вт, а сообщение требуется воспроизвести со среднеквадратичной ошибкой $\overset{\circ}{\varepsilon}{}^2\leqslant10^{-4}$ (считать, что при КИМ используется двоичный код, а число уровней квантования $K=128$; полосы канала при КИМ—ЧМ и ЧМ одинаковы) (см. [2]; § 6.2, 6.3 в данной книге; [23])?

8.11. Непрерывное сообщение можно передать посредством КИМ—ФМ или ДМ—ФМ по каналу, в котором отношение мощности сигнала к мощности шума в полосе сообщения равно 500.

Предполагая, что в обеих системах обеспечивается оптимальная скорость манипуляции $v_и$, выбрать систему, обеспечивающую наилучшее отношение $h^2{}_{вых}$ на выходе приемника (см. [2]; [23]; § 6.3 в данной книге)?

8.12. Передача информации осуществляется по двоичному симметричному каналу без памяти с вероятностью ошибки в символе $p_0=10^{-3}$. В данном канале предполагается использовать систему без обратной связи с квазисовершенным кодом Боуза — Чоудхури (31, 32), имеющим $d=5$ и $q_и=2$, или систему с управляющей обратной связью с кодом Абрамсона (31, 35), имеющим $d=4$ и $q_0=3$. Полагая, что в канале обратной связи ошибки практически отсутствуют, дать рекомендации по использованию указанных систем, приняв во внимание остаточную вероятность ошибки и избыточность кода (см. 9.6; 7.2 [18])?

Список литературы

1. **Аппаратура** передачи дискретной информации МС-5. М., «Связь», 1970. 152 с.
2. **Величкин А. И.** Теория дискретной передачи непрерывных сообщений. М., «Сов. радио», 1970. 296 с.
3. **Вентцель Е. С.** Теория вероятностей. М., «Наука», 1964. 576 с.
4. **Галлагер Р.** Теория информации и надежная связь. М., «Сов. радио», 1974. 720 с.
5. **Горяинов В. Т., Журавлев А. Г., Тихонов В. И.** Примеры и задачи по статистической радиотехнике. М., «Сов. радио», 1970. 598 с.
6. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962. 1100 с.
7. **Гуткин Л. С.** Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. М., Госэнергоиздат, 1961. 488 с.
8. **Задачник** по теории вероятностей. Под ред. А. А. Свешникова. М., «Наука», 1965, 632 с.
9. **Зюко А. Г.** Помехоустойчивость и эффективность систем связи. М., «Связь», 1972. 360 с.
10. **Зюко А. Г., Коробов Ю. Ф.** Теория передачи сигналов. М., «Связь», 1972. 282 с.
11. **Кловский Д. Д.** Передача дискретных сообщений по радиоканалам. М., «Связь», 1969. 376 с.
12. **Кловский Д. Д.** Теория передачи сигналов. М., «Связь», 1973. 376 с.
13. **Кловский Д. Д., Николаев Б. И.** Инженерная реализация радиотехнических схем. М., «Связь», 1975. 200 с.
14. **Лебедев Д. С., Цуккерман И. И.** Телевидение и теория информации. М.—Л., «Энергия», 1965. 220 с.
15. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. Ч. 1. М., «Сов. радио», 1966. 728 с.
16. **Лезин Ю. С.** Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов. М., «Сов. радио», 1969. 448 с.
17. **Милн—Томсон Л. М., Комри Л. Дж.** Четырехзначные математические таблицы. М., Физматгиз, 1961. 246 с.
18. **Назаров М. В., Кувшинов Б. И., Попов О. В.** Теория передачи сигналов. М., «Связь», 1970. 368 с.
19. **Петрович Н. Т.** Передача дискретной информации в каналах с фазовой и относительной фазовой манипуляцией. М., «Сов. радио», 1965. 264 с.
20. **Питерсон У.** Коды, исправляющие ошибки. М., «Мир», 1964. 338 с.
21. **Тихонов В. И.** Статистическая радиотехника. М., «Сов. радио», 1966. 678 с.
22. **Теоретические** основы связи и правления. Под ред. А. А. Фельдбаума. М., Физматгиз, 1963. 932 с.
23. **Финк Л. М.** Теория передачи дискретных сообщений. М., «Сов. радио», 1970. 728 с.
24. **Фалькович С. Е.** Оценка параметров сигнала. М., «Сов. радио», 1970. 336 с.
25. **Харкевич А. А.** Борьба с помехами. М., «Наука», 1965. 275 с.
26. **Янке Н., Эмде Ф., Леш Ф.** Специальные функции. М., «Наука», 1968. 344 с.
27. **Шляпоберский В. И.** Основы техники передачи дискретных сообщений. М., «Связь», 1973. 480 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 3
Список основных обозначений 5

Глава 1

Спектральное и временно́е представление сигналов и помех . 8

1.1. Спектральные характеристики случайных процессов . . 8
1.2. Огибающая, мгновенная фаза и частота узкополосного случайного процесса 25
1.3. Основы теории дискретизации функций непрерывного аргумента. Теорема Котельникова 38
1.4. Пространства сообщений и сигналов 43
1.5. Физический объем сигнала и канала связи 54

Глава 2

Каналы связи и их звенья 59

2.1. Модели каналов связи и их математическое описание . 59
2.2. Изменения формы сигналов, обусловленные характеристиками непрерывного канала 69
2.3. Аддитивные помехи в непрерывном канале связи . . 79
2.4. Прохождение случайных воздействий через канал связи и его звенья 85

Глава 3

Информационные характеристики систем связи 98

3.1. Количественное определение информации 98
Энтропия и производительность дискретного источника сообщений 98
3.2. Количество и скорость передачи информации по дискретному каналу. Пропускная способность дискретного канала 108
3.3. Энтропия и производительность непрерывного источника сообщений 120
3.4. Количество и скорость передачи информации по непрерывному каналу. Пропускная способность непрерывного канала 129

Глава 4

Основы теории кодирования 135

4.1. Представление кодов. Свойства кодов без избыточности 135
4.2. Корректирующие коды и их свойства 143
4.3. Сравнительная эффективность избыточного кодирования 168

Стр.

Глава 5

Передача дискретных сообщений 176

5.1. Критерии оптимального приема. Алгоритмы оптимального приема при точно известном сигнале 176
5.2. Реализация алгоритма оптимального приема при точно известном сигнале на основе согласованных фильтров . 192
5.3. Помехоустойчивость (вероятность ошибки) оптимальных схем приема при точно известном сигнале 201
5.4. Алгоритм оптимального приема и помехоустойчивость при неопределенной фазе и амплитуде сигнала 222
5.5. Сравнительная эффективность систем передачи дискретных сообщений 234

Глава 6

Передача непрерывных сообщений 249

6.1. Оптимальная оценка отдельных параметров сигнала . . 249
6.2. Оптимальный прием непрерывных сообщений. Выигрыш и обобщенный выигрыш модема. Потенциальная помехоустойчивость при различных видах модуляции несущей непрерывным сообщением 261
6.3. Передача непрерывных сообщений дискретными методами 284
6.4. Оптимальная и субоптимальная фильтрация непрерывных сигналов 295
6.5. Сравнительная эффективность систем передачи непрерывных сообщений 308

Глава 7

Многоканальные системы связи 314

7.1. Раздельные и комбинационные системы уплотнения при многоканальной связи 314
7.2. Характеристики эффективности и информационные характеристики многоканальных систем 334

Глава 8

Задачи на выбор наилучшего варианта системы связи . . 347

Список литературы 350

ТЕОРИЯ ПЕРЕДАЧИ СИГНАЛОВ В ЗАДАЧАХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «СВЯЗЬ»